دفترچه‌ی هندسی
جلد ۱

دفترچه‌ی هندسی دال

سیری در دنیای هندسه‌ی محاسباتی

۱۳۹۷-۹۸

پیشگفتار

سکوت را می‌شکنیم و پس از ماه‌ها دوباره قلم را در دست می‌گیریم. حدود یک سال قبل نامه‌ای را دریافت کردیم که ما را در اندوه غرق کرد. نامه‌ی کوتاهی که دنیای هندسی پر امید ما را واژگون ساخت. نامه‌ای از طرف دال: «زمان خداحافظی فرا رسیده است و به ناچار باید شما را ترک کنم».

هر کجا که تصور می‌کردیم دال رفته باشد را جستجو کردیم اما اثری از او نیافتیم. در پایان ماه‌ها تلاش، وقتی که یأس از دست دادن دال در ذهن ما غالب شد، تصمیم گرفتیم شماره‌ی جدیدی از پنج‌شنبه‌های سخت را منتشر نکنیم و آن را کنار بگذاریم. نشریه‌ای که هر برگ آن بوی دال را می‌داد.

ما و سایر علاقمندان نشریه‌ی پنج‌شنبه‌های سخت برای خواندن یادداشت‌های دال، برای هر شماره‌ی این نشریه لحظه‌شماری کرده‌ایم تا روی برگ‌های این یادداشت‌ها اوج بگیریم و افق‌های ناشناخته‌ای از دنیای علم را مشاهده کنیم. پس از زیر و رو کردن کتاب‌های تاریخ، سراغ نداریم خوانندگان هیچ نشریه‌ای چنین احساس نزدیکی و وابستگی به یکی از نویسندگان آن داشته باشند. هنوز هم با افتخار نامه‌های پر مهر خوانندگان این نشریه را دریافت می‌کنیم.

با وجود درد فقدان دال و با توجه به چنین شوق بی‌نظیری از سوی خوانندگان گرامی، تصمیم گرفتیم نشریه‌ی جدیدی را با عنوان «یادداشت‌های هندسی دال» منتشر کنیم. این نشریه که توسط سردبیر نگارش می‌شود، موضوعاتی را مطرح می‌کند که در یکی از دفترچه‌هایی که از دال در دست سردبیر باقی مانده است بیان شده‌اند. یادداشت‌های دال بسیار خلاصه هستند؛ از این رو، در این نشریه آنها را کمی گسترش می‌دهیم و نکته‌هایی را به این یادداشت‌ها اضافه می‌نماییم.

در یکی از صفحه‌های آغازین دفترچه‌اش دال می‌نویسد: من به مطالعه‌ی مسئله‌های محاسباتی هندسی علاقمند هستم که در کاربردهای مختلف ظاهر می‌شوند و سعی می‌کنم برای آنها الگوریتم بیابم. الگوریتم‌هایی را ترجیح می‌دهم که به صورت نظری بتوان برای آن تضمینی اثبات کرد اما به الگوریتم‌های هندسی که به صورت تجربی عملکرد آنها نشان داده می‌شود نیز علاقه دارم. دنیای هندسه‌ی محاسباتی مملو است از موضوعات جالب با کاربردهای مهم.

- کشیدن گراف. مسائلی در خصوص نقشه‌ها، نمودارها و بیان رابطه بین مفاهیم به صورت گرافیکی.
- گرافیک کامپیوتری. مسئله‌هایی در رابطه با موضوعاتی مثل نمایش تصاویر سه بعدی.
- انطباق الگو. مثل یافتن الگوهای هندسی.

- سامانه‌های اطلاعات جغرافیایی. موضوعات بسیار زیادی در این کاربرد مطرح هستند، مثل ساده‌سازی خم، یافتن گروه‌های متحرک، دسته‌بندی خم‌ها، یافتن شباهت خم‌ها.
- برنامه‌ریزی خطی. بسیاری از مسئله‌های بهینه‌سازی با برنامه‌های خطی بیان و حل می‌شوند و برخی از الگوریتم‌های حل این برنامه‌ها هندسی هستند.
- برنامه‌ریزی حرکت. یافتن مسیری در صفحه یا فضا که ویژگی‌های مشخصی داشته باشد.
- ابزارهای CAD. ابزارهای طراحی کامپیوتری در رشته‌هایی مثل مهندسی عمران، مکانیک و معماری استفاده می‌شوند و در آنها مسئله‌های هندسی زیادی وجود دارند.
- مدلسازی هندسی. بیان هندسی شکل‌ها.

کاربردهایی که اخیرا به آنها پرداخته‌ام موضوعات مطرح شده در GIS، به خصوص در تحلیل مسیر و حرکت هستند. در تحلیل مسیر، موضوعات جالب زیادی مطرح هستند، از جمله گسستن مسیر، ساده‌سازی مسیر، یافتن ناحیه‌های توقف، یافتن مسیرهای مشابه، یافتن گروه‌ها. برای آشنایی با برخی از این موضوعات، فصل مقدمه‌ی رساله‌های دکترای زیر را توصیه می‌کنم.

- استالز (۲۰۱۵؛ پیوند): مسئله‌های زیادی از جمله یافتن ناحیه‌های داغ و گسستن مسیر را بررسی می‌کند.
- کنزاک (۲۰۱۸؛ پیوند): تمرکز ویژه‌ای بر الگوریتم‌های تحلیل مسیر و کاربردهای نمایشی می‌کند.
- دریمل (۲۰۱۳؛ پیوند): مخصوصا به محاسبه‌ی فاصله‌ی فریشه (Fréchet) می‌پردازد.

برای تماس با سردبیر با آدرس gholamirudi@nit.ac.ir مکاتبه نمایید.

پاسخ‌های نیمه‌تمام

ایجاد ۱۳۹۷/۶/۱ تغییر ۱۳۹۷/۱۲/۲۹

در دفترچه‌ی دال مسئله‌های زیادی مطرح شده‌اند. برای بسیاری از این مسئله‌ها هنوز از پاسخ کاملی آگاه نیستیم. برخی از این مسئله‌ها را در ادامه معرفی می‌کنیم.

ساده‌سازی مسیر. در یکی از صفحه‌های دفترچه‌ی دال به مسئله‌ی ساده‌سازی خم اشاره شده است. حرکت یک اتومبیل، پرنده یا انسان توسط یک مسیر که از تعدادی رأس تشکیل می‌شود بیان می‌شود. دلایل مهمی وجود دارند که تعداد رأس‌های این مسیرها کاهش یابند و الگوریتم‌های متفاوتی برای این کار ارائه شده‌اند. دال می‌پرسد که آیا برای حالت محدود به یال در این مسئله (رأس‌های مسیر ساده شده می‌توانند با حفظ ترتیب روی هر نقطه از یال‌های مسیر ورودی قرار گیرند) الگوریتم تقریبی یا دقیق کارایی وجود دارد؟ در گزارشی (پیوند) الگوریتمی برای ساده‌سازی محدود به یال ارائه داده‌ام (سردبیر) که تعداد رأس‌های مسیری حاصل حداکثر دو برابر تعداد رأس‌های مسیر ساده شده با کمترین تعداد رأس است.

- آیا می‌توان پیچیدگی زمانی این الگوریتم را که از برنامه‌ریزی پویا استفاده می‌کند، بهبود داد؟
- آیا می‌توان یک الگوریتم قطعی کارا برای ساده‌سازی محدود به یال مسیر ارائه داد؟
- آیا الگوریتم برخط سریعی برای این مسئله وجود دارد؟

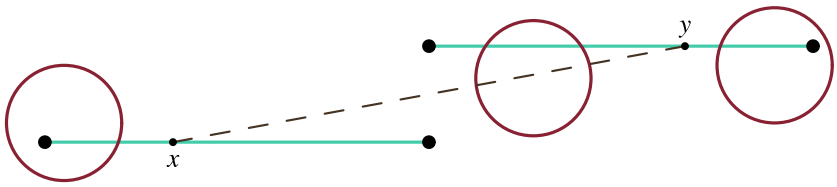
لانه‌ی پرنده. در یکی از صفحه‌های قدیمی دفترچه‌ی دال مسئله‌ای مطرح شده است که در گذشته در مورد آن نوشته‌ایم. خوانندگان گرامی نشریه‌ی پنج‌شنبه‌های سخت به خاطر دارند که در پنجشنبه‌ی سخت سی‌ام (پیوند) به یافتن مکان احتمالی لانه‌ی یک پرنده پرداختیم. در گزارشی (پیوند) روشی تقریبی برای یافتن مکان‌های ممکن لانه ارائه داده‌ام (سردبیر).

- آیا می‌توان الگوریتم دقیق یا سریع‌تری برای این مسئله یافت؟
- چگونه می‌توان الگوریتم را تغییر داد تا لانه‌ای را بیابد که چند پرنده به آن سر می‌زنند؟

یافتن گروه‌ها. در صفحه‌ای از دفترچه‌ی هندسی دال، او به مقاله‌ای اشاره می‌کند (پیوند) که در آن اشیاء متحرکی که به صورت گروهی حرکت می‌کنند شناسایی می‌شوند. آنها الگوریتمی برای این کار با پیچیدگی زمانی $O(\tau^۲ n^۵ \log n)$ ارائه می‌دهند که در آن n تعداد اشیاء و τ تعداد رأس‌های هر مسیر است. بدیهی است که چنین الگوریتمی در عمل بسیار کند است.

- آیا می‌توان پیچیدگی این الگوریتم را بهبود داد؟
- آیا الگوریتم تقریبی خوبی برای این مسئله وجود دارد؟
- آیا الگوریتم خوبی وجود دارد که پس از پیش‌پردازش، بتواند گروه‌ها را با مقدارهای متفاوت ε بیابد.

بازدید از دیسک‌ها. دو پاره‌خط ab و cd را در صفحه در نظر بگیرید به طوری که رابطه‌ی $a_y \leq b_y \leq c_y \leq d_y$ برقرار باشد (a_y مؤلفه‌ی y نقطه‌ی a است). همچنین، n دیسک (ناحیه‌ی محصور در یک دایره با شعاع واحد) داده می‌شوند که مؤلفه‌ی y مرکز هر یک از آنها بین b_y و c_y است. نقطه‌ی x روی پاره‌خط ab و y روی پاره‌خط cd نیز به شکلی مشخص شده‌اند که خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، از همه‌ی دیسک‌ها عبور می‌کند، اما ممکن است پاره خط xy همه‌ی این دیسک‌ها عبور نکند. آیا الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ وجود دارد که در صورت وجود پاره‌خطی را از نقطه‌ای روی ab به نقطه‌ای روی cd بیابد که از همه‌ی دیسک‌ها عبور کند؟



مکان‌های پرطرفدار

در یادداشت‌های دال به نامه‌ای اشاره شده است که در آن از او خواسته شده است که مکان‌های پرطرفدار شناسایی شوند. به عنوان ورودی مسیر حرکت تعدادی جسم داده می‌شود و هدف یافتن تعداد بازدید از ناحیه‌هایی است که به عنوان پرسش داده می‌شوند (اطلاعات بیشتر: الف، ب).

گام‌ها. گام‌های زیر را برای یافتن ناحیه‌های پرطرفدار پیشنهاد می‌کنیم.

- تولید نمونه‌ها با اندازه‌های متفاوت و برای حالت‌های مختلف.
- الگوریتم ساده در حالت یک بعدی: بررسی تقاطع یال‌ها با اضلاع ناحیه‌ی پرسش.
- شمارش تقاطع‌ها در حالت یک بعدی: بدون محدودیت زمان بازدید با ساختمان داده‌ی درخت سگمنت.
- بررسی بازدیدها در حالت یک بعدی: بدون محدودیت زمان بازدید، بررسی برخوردهای متوالی.
- الگوریتم ساده در حالت دو بعدی: بررسی تقاطع یال‌ها با اضلاع ناحیه‌ی پرسش.
- شمارش تقاطع‌ها در حالت دو بعدی: استفاده از ساختمان داده‌ی درخت سگمنت دو بعدی.
- بررسی برخوردها در حالت دو بعدی: گسترش ایده‌ی یک بعدی به حالت دو بعدی.
- ارزیابی به کمک مجموعه داده‌های موجود.

الگوی ورودی. هر فایل ورودی با یک عدد شروع می‌شود که تعداد مسیرها را نشان می‌دهد. سپس برای هر مسیر، خط اول تعداد رأس‌های مسیر را نشان می‌دهد. سپس به تعداد رأس‌ها، سه عدد مشخص می‌شوند. عدد اول زمان عبور جسم از آن رأس و عدد دوم و سوم مختصات رأس (در حالت یک بعدی، عدد سوم اهمیتی ندارد) را مشخص می‌کنند. پس از بیان مسیرها، تعداد پرسش‌ها مشخص می‌شود. هر پرسش با شش عدد بیان می‌شود: دو عدد اول مختصات گوشه‌ی پایین و سمت چپ و دو عدد دوم مختصات گوشه‌ی بالا و سمت راست ناحیه‌ی پرسش را مشخص می‌کنند. همچنین، عدد پنجم و ششم، کمینه و بیشینه‌ی زمان بازدید را نشان می‌دهند (در حالت بدون محدودیت زمانی، دو عدد آخر اهمیت ندارد). در خروجی به ازای هر پرسش، تعداد بازدیدها بیان می‌شود. در نمونه‌ی زیر، یک مسیر و سه پرسش وجود دارند.

ورودی	خروجی
1 4 1 0 0 2 10 0 3 0 0 4 5 0 3 1 0 2 0 0 10 11 0 12 0 0 10 6 0 8 0 0 10	3 0 2

ساده کردن خم‌ها

یک خم دنباله‌ای از تعدادی رأس روی یک صفحه است. هدف کاهش تعداد رأس‌های یک خم است به صورتی که شکل کلی خم تغییر زیادی نکند. حداکثر میزان خطا بین خم ورودی و خم ساده شده به عنوان ورودی داده می‌شود و هدف محاسبه‌ی خمی است که تعداد رأس‌های آن کمینه باشد (اطلاعات بیشتر: الف، ب، ج). در ساده‌سازی محدود به رأس، رأس‌های خم ساده شده زیر مجموعه‌ای از رأس‌های خم ورودی هستند اما در ساده‌سازی محدود به یال، رأس‌های خم ساده شده، می‌توانند روی یال‌های خم ورودی نیز قرار گیرند. در صفحه‌ای از دفترچه، دال در مورد ساده سازی برخط محدود به خم توضیحاتی داده است.

یافتن خطای ساده‌سازی. معیارهای مختلفی برای محاسبه‌ی میزان خطا بین خم اصلی و خم ساده شده وجود دارد. یکی از این معیارها فاصله‌ی محلی هازدورف است. برای محاسبه‌ی خطا با استفاده از این معیار، ابتدا لازم است فاصله‌ی یک پاره‌خط pq و یک خم C محاسبه گردد. فاصله‌ی هازدورف بین pq و C بیشینه‌ی فاصله‌ی نقطه‌های C از پاره‌خط pq است. چون رأس‌های C همیشه بیشترین فاصله را در بین نقطه‌های C نسبت به pq دارند، محاسبه‌ی بیشینه‌ی فاصله‌ی رأس‌های C از پاره‌خط pq برای محاسبه کردن فاصله‌ی هازدورف کافی است. خطای ساده‌سازی بیشینه‌ی فاصله‌ی یال‌های خم ساده شده نسبت به قسمت متناظر آن‌ها در خم اصلی است.

گام‌ها. گام‌های زیر را برای ساده‌سازی خم پیشنهاد می‌کنیم.

- محاسبه‌ی میزان خطا: خطا با استفاده از فاصله‌ی هازدورف بین یک یال و یک خم.
- پیاده‌سازی الگوریتم برخط محدود به رأس Agarwal و همکارانش.
- تغییر الگوریتم Agarwal برای حالت محدود به خم با ایده‌ی شکستن یال‌ها به تکه‌های کوچک‌تر.
- ارزیابی به کمک مجموعه داده‌های موجود.
- تغییر الگوریتم جریانی Abam و همکارانش برای حالت محدود به خم با شکستن یال‌ها به تکه‌های کوچک‌تر.

الگوی ورودی. ورودی با دو عدد شروع می‌شود. عدد اول تعداد رأس‌های خم و عدد دوم حداکثر میزان خطا را مشخص می‌کند. سپس، به تعداد رأس‌های خم، جفت عدد ظاهر می‌شود که هر جفت، مختصات یک رأس خم را نشان می‌دهد. خروجی مسیر ساده شده است و که با یک عدد شروع می‌شود که تعداد رأس‌ها را مشخص می‌کند. سپس مختصات رأس‌های ساده شده بیان می‌شوند.

نقشه و دایره‌ها

ایجاد ۱۳۹۸/۸/۰۶ تغییر ۱۳۹۸/۸/۰۶

در صفحه‌ای از دفترچه‌ی دال، او به مسئله‌ای در مورد قرار دادن برچسب روی نقشه می‌پردازد. در مورد حالتی از این مسئله در گذشته نکاتی نوشته‌ام (پیوند). اما شکل کلی مسئله‌ای که دال مطرح می‌کند، سخت‌تر به نظر می‌رسد. حالت یک بعدی این مسئله در ادامه بیان می‌شود.

ترکیب دایره‌ها. تعدادی دایره به شکلی در صفحه قرار گرفته‌اند که مرکز همه‌ی آنها روی یک خط است. اگر یک دایره مثل A، مرکز دایره‌ی دیگری مثل B را در بر گرفته باشد، این دو دایره با هم تداخل دارند. در این شرایط، می‌توان دایره‌ی B را با دایره‌ی A ترکیب کرد. پس از ترکیب، شعاع دایره‌ی A به اندازه‌ی شعاع دایره‌ی B افزایش می‌یابد و دایره‌ی B حذف می‌شود. هدف رسیدن به حالتی است که هیچ جفتی از دایره‌های باقی مانده با هم تداخل نداشته باشند و از طرف دیگر، بزرگ‌ترین شعاع دایره‌های باقی‌مانده کمینه باشد. فرض کنید دایره‌ی A تنها وقتی بتواند با دایره‌ی B ترکیب شود که همه‌ی دایره‌های نزدیک‌تر به A نیز با آن ترکیب شده باشند.

گشت در نزدیکی خانه

ایجاد ۱۳۹۸/۸/۰۸ تغییر ۱۳۹۸/۸/۰۸

در پنج‌شنبه‌ی سخت سی‌ام (پیوند)، مسئله‌ای مطرح شده بود که هدف آن یافتن ناحیه‌ای بود که یک جسم متحرک هیچگاه به مدت طولانی آن را ترک نمی‌کند. وقتی که با دقت بیشتری یادداشت‌های دال در مورد این مسئله را بررسی کردیم، مسئله‌ی نزدیکی به آن در حالت دو بعدی یافتیم که بسیار جالب است.

خانه‌ای در نزدیکی. مسیر جسمی را در نظر بگیرید و فرض کنید ثابت α و g به عنوان ورودی داده شده باشند. هدف یافتن کوچک‌ترین ناحیه‌ای به شکل مربع است که جسم هیچ‌گاه بیشتر از زمان g بیرون آن نباشد و همواره در نزدیکی آن ناحیه باشد. نزدیک بودن یعنی اگر طول ضلع ناحیه s باشد، جسم همواره (حتی در زمان بیرون بودن از ناحیه) باید در مربع بزرگ‌تری با طول ضلع αs قرار داشته باشد ($\alpha \geq ۱$).