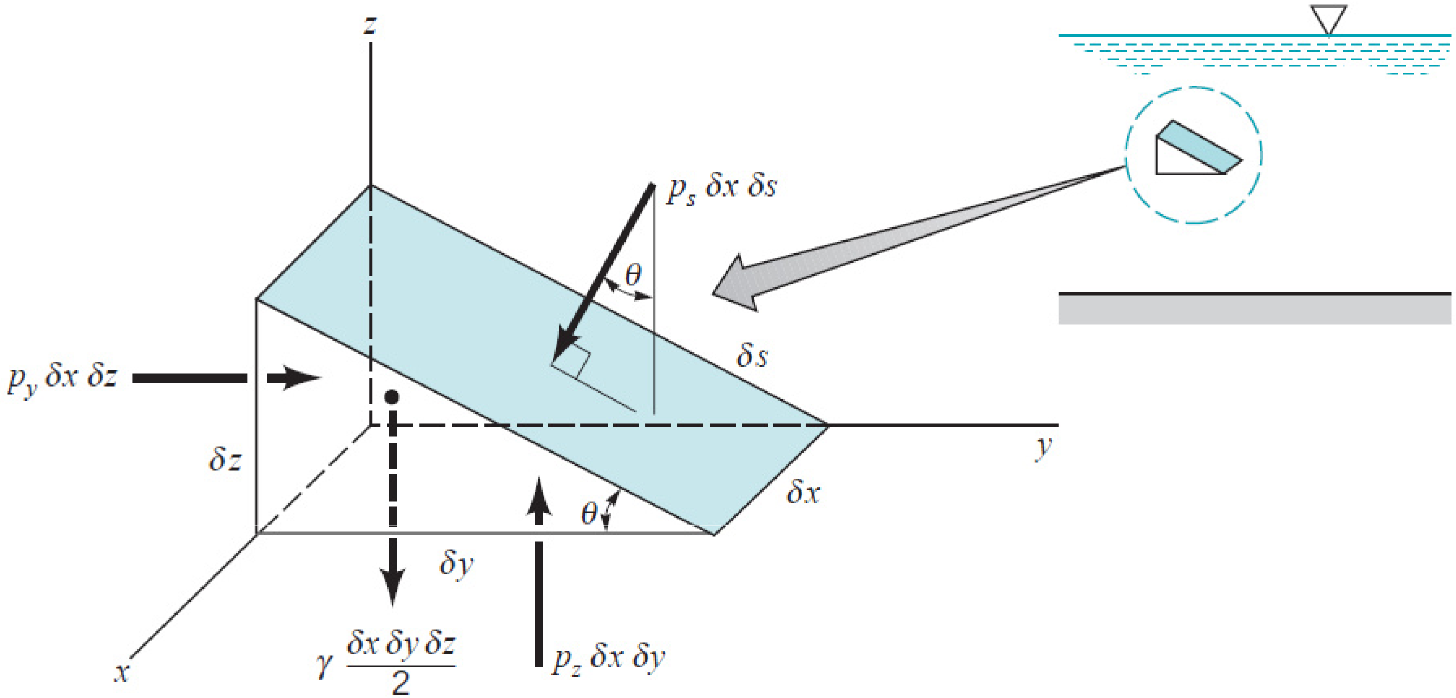
استاتیک سیال

سوال: تغییرا ت فشار در یک نقطه با چرخش سطح حاوی نقطه مورد نظر چگونه است؟



Newton's second law, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

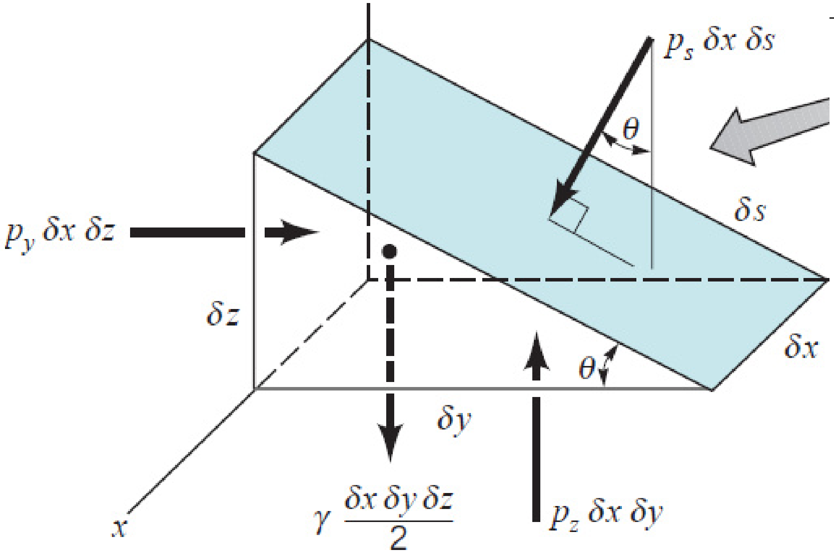
$$\sum F_y = p_y\,\delta x\,\delta z - p_s\,\delta x\,\delta s\sin\theta = \rho\,\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2}\,a_y$$

$$\sum F_z = p_z\,\delta x\,\delta y - p_s\,\delta x\,\delta s\cos\theta - \gamma\,\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2} = \rho\,\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2}\,a_z$$

where p_s, p_y, and p_z are the average pressures on the faces

a_y, a_z the accelerations

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



$$\delta y = \delta s \cos\theta \qquad \delta z = \delta s \sin\theta$$

$$\sum F_y = p_y\,\cancel{\delta x}\,\delta z - p_s\,\cancel{\delta x}\,\delta s \sin\theta = \rho\,\frac{\cancel{\delta x}\,\delta y\,\delta z}{2}\,a_y$$

$$\sum F_z = p_z\,\cancel{\delta x}\,\delta y - p_s\,\cancel{\delta x}\,\delta s \cos\theta - \gamma\,\frac{\cancel{\delta x}\,\delta y\,\delta z}{2} = \rho\,\frac{\cancel{\delta x}\,\delta y\,\delta z}{2}\,a_z$$

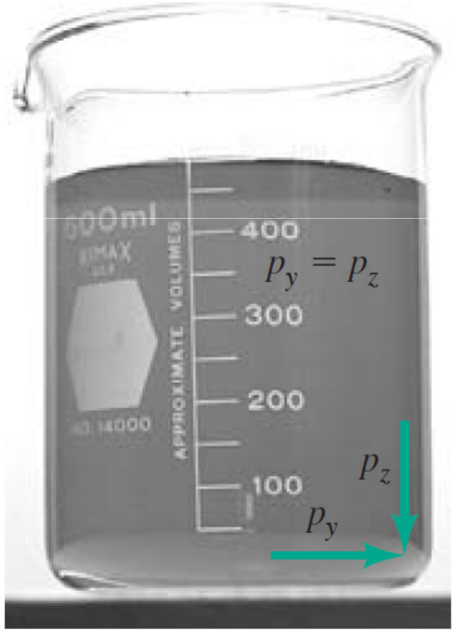
$$p_y - p_s = \rho a_y \frac{\delta y}{2}$$

$$p_z - p_s = (\rho a_z + \gamma)\frac{\delta z}{2}$$

δx, δy, and δz → Zero (0)

به سمت صفر میل کند

$$\boxed{p_y = p_s \qquad p_z = p_s}$$



فشار در یک نقطه از سیال ساکن و یا در حرکت، مستقل از جهت برش در صورت عدم حضور تنش برشی خواهد بود.
این قانون تحت عنوان قانون پاسکال (Pascal's Law) نامیده می شود.

Blaise Pascal 1623–1662, a French mathematician

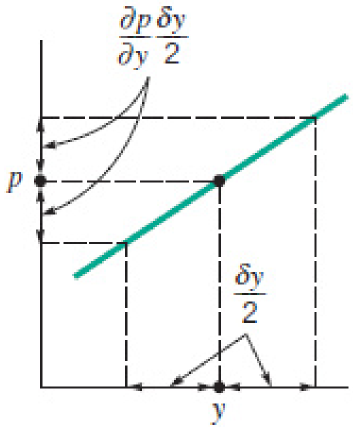
معادلات پایه برای میدان فشار

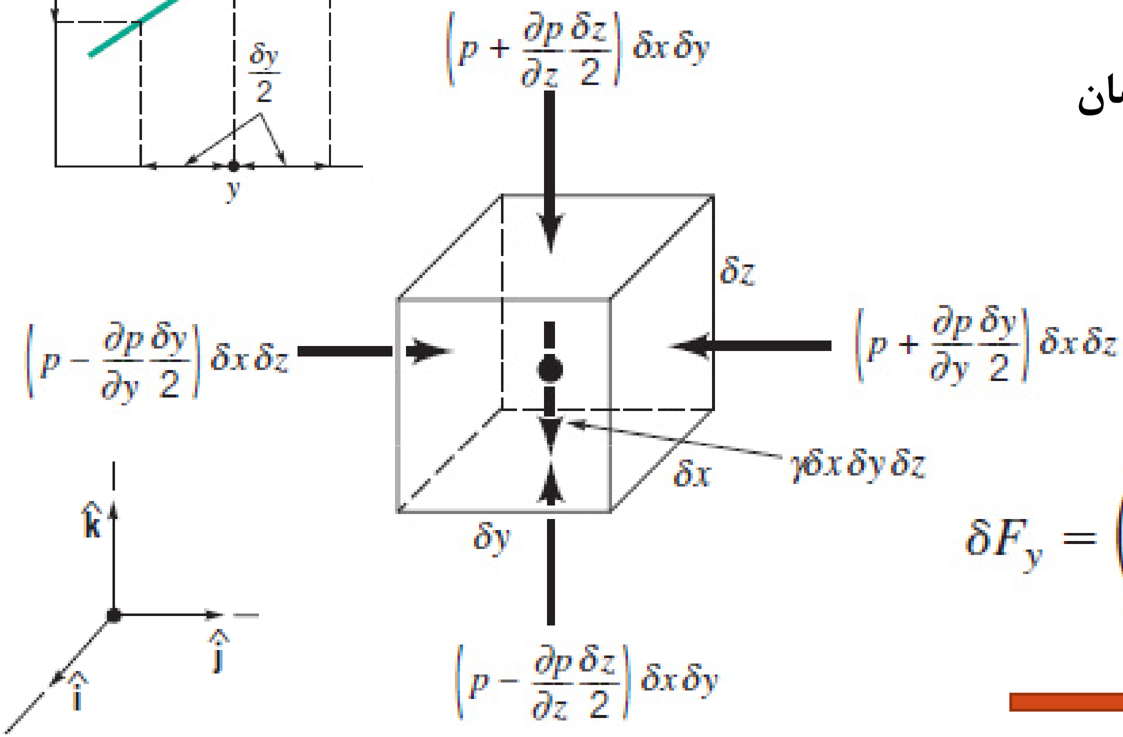
سوال: فشار در نقاط مختلف سیال بدون حضور تنش برشی چگونه تغییر می کند؟

دو نیرو بر المان سیال وارد می شود.

۱- نیروی ناشی از فشار سیال اطراف بر روی سطوح المان

۲- نیروی ناشی از وزن المان





در راستای y

$$\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\,\delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\,\delta z$$

$$\Rightarrow \quad \delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

for the x and z directions the resultant surface forces are

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z \qquad \delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

$$\delta \mathbf{F}_s = \delta F_x \hat{\mathbf{i}} + \delta F_y \hat{\mathbf{j}} + \delta F_z \hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{F}_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

The resultant surface force

$$\delta \mathbf{F}_s = \delta F_x \hat{\mathbf{i}} + \delta F_y \hat{\mathbf{j}} + \delta F_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\delta \mathbf{F}_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \right) \delta x\, \delta y\, \delta z$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \nabla p$$

$$\frac{\delta \mathbf{F}_s}{\delta x\, \delta y\, \delta z} = -\nabla p$$

the weight of the element

$$-\delta \mathcal{W} \hat{\mathbf{k}} = -\gamma\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, \hat{\mathbf{k}}$$

$$\sum \delta \mathbf{F} = \delta m\, \mathbf{a}$$

$$\sum \delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{F}_s - \delta \mathcal{W} \hat{\mathbf{k}} = \delta m\, \mathbf{a}$$

$$\Rightarrow -\nabla p\, \delta x\, \delta y\, \delta z - \gamma\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, \hat{\mathbf{k}} = \rho\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, \mathbf{a}$$

$$\boxed{-\nabla p - \gamma \hat{\mathbf{k}} = \rho \mathbf{a}}$$

$$d\vec{F} = d\vec{F}_S + d\vec{F}_B = (-\nabla p + \rho \vec{g})\, dx\, dy\, dz = (-\nabla p + \rho \vec{g})\, d\forall$$

$$\vec{F} = \vec{a}\, dm = \vec{a} \rho\, d\forall.$$

For a fluid at rest $\mathbf{a} = 0$ ⇒

سیال ساکن

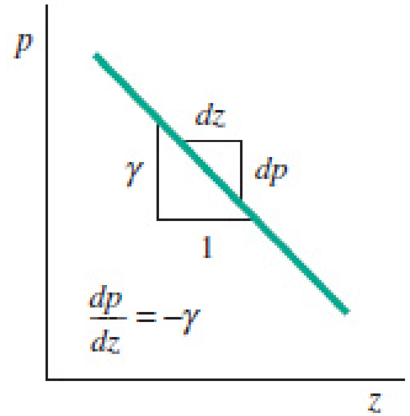
$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = 0 \quad x \text{ direction}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 \quad y \text{ direction}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0 \quad z \text{ direction}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \equiv -\gamma$$



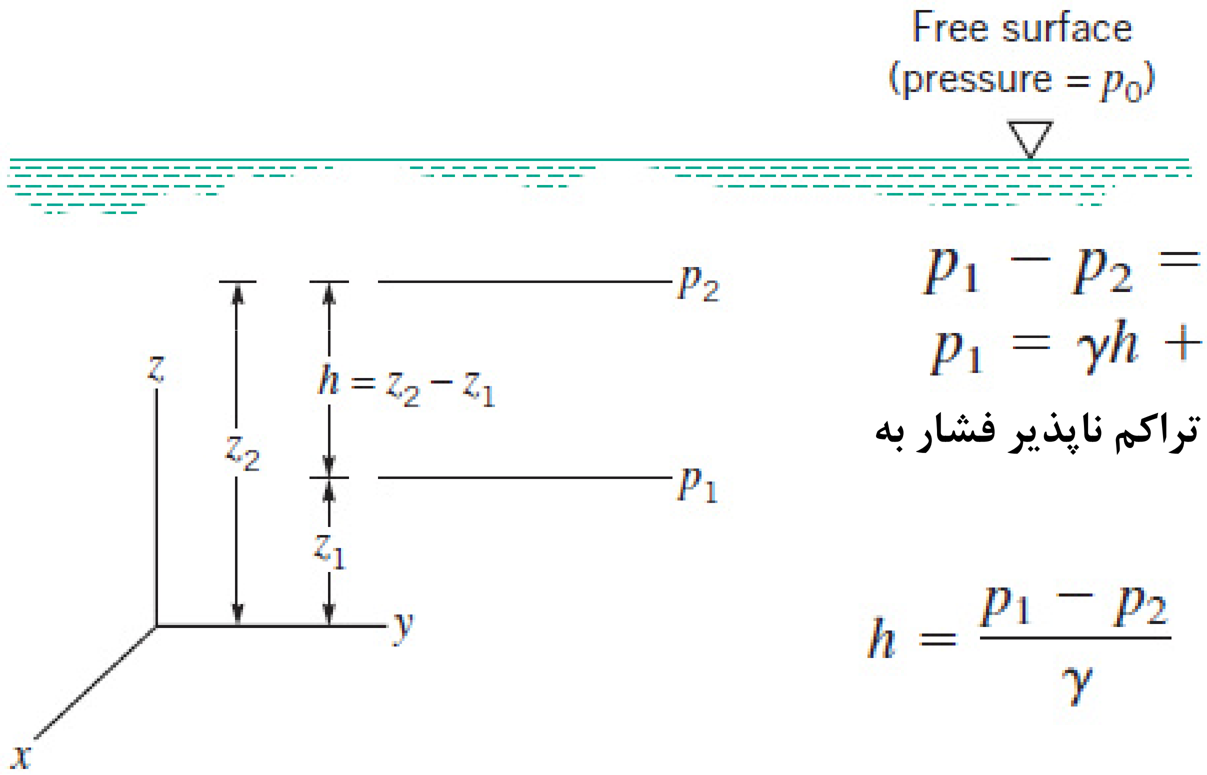
Incompressible Fluid $\Leftrightarrow$ $\rho = \text{constant}$

$$\gamma = \rho g$$

تغییرات شتاب جاذبه ناچیز فرض شود

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \Rightarrow p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1)$$

فشار هیدرواستاتیک



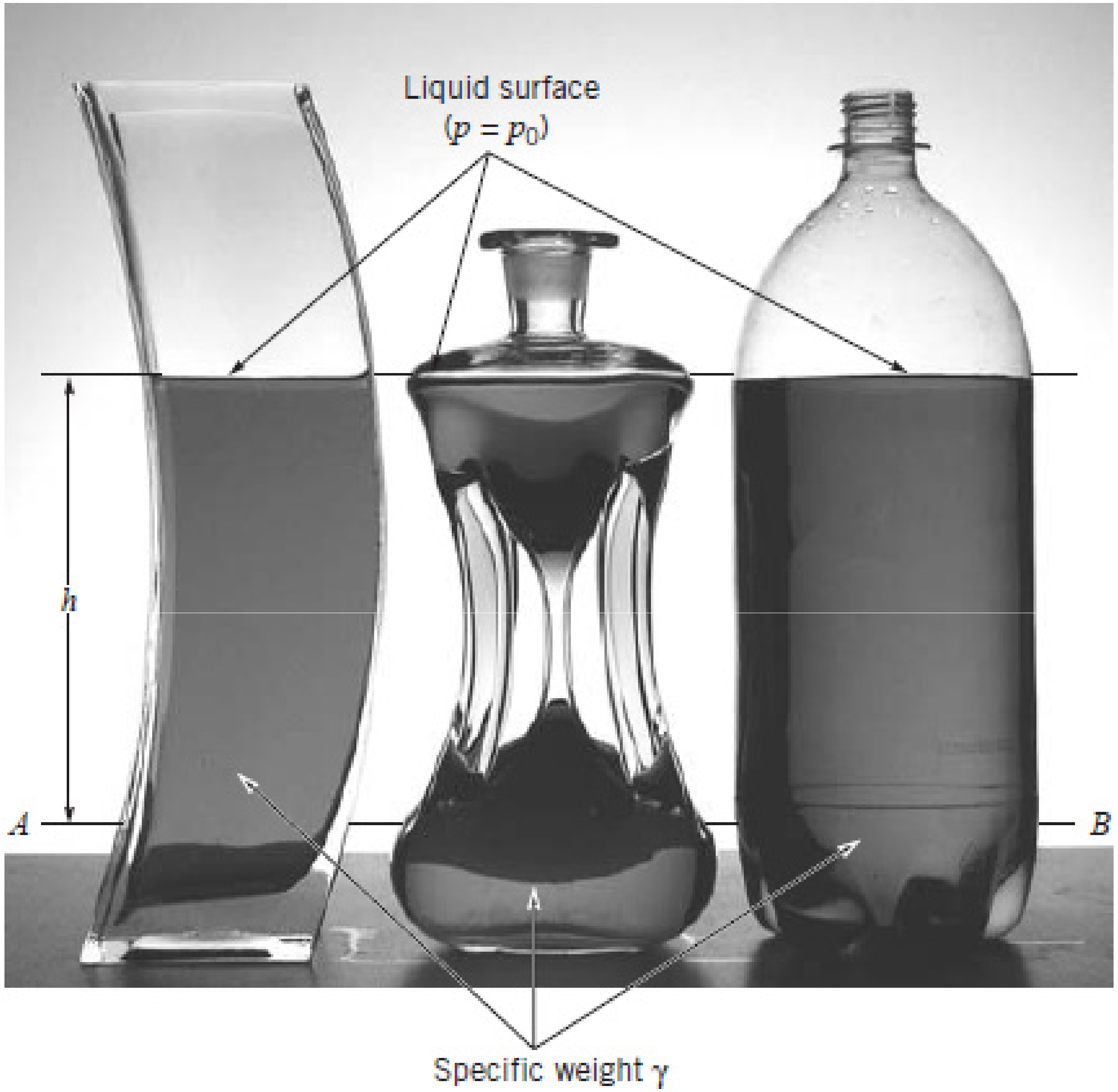
$$p_1 - p_2 = \gamma h$$
$$p_1 = \gamma h + p_2$$

این رابطه نشان می دهد برای یک سیال ساکن تراکم ناپذیر فشار به صورت خطی با ارتفاع تغییر می نماید

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

نکته: فشار هیدرواستاتیک فقط به ارتفاع ستون سیال و جنس سیال وابسته است

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



فشار بر روی پاره خط AB

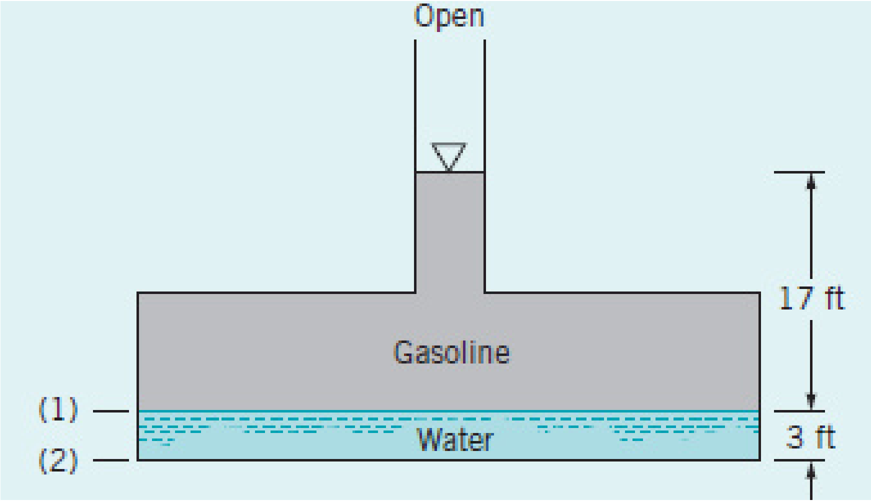
$$p = \gamma h + p_0$$

The reference pressure p_0

در صورت ارتباط با محیط آزاد، فشار اتمسفر در نظر گرفته می شود

مثال: در منابع ذخیره سوخت غالبا مقداری آب موجود بوده که در پایین مخزن جمع می گردد. مقدار فشار را در حد فاصل میان سوخت و آب و همچنین در کف مخزن محاسبه نمایید.

در ادامه میزان ارتفاع مورد نیاز سیال آب برای رسیدن به فشار p1 بدست آورید.



gravity of the gasoline is $SG = 0.68$

$$p = \gamma h + p_0$$

$$p_1 = SG\gamma_{H_2O} h + p_0$$
$$= (0.68)(62.4\ \text{lb/ft}^3)(17\ \text{ft}) + p_0$$
$$= 721 + p_0\ (\text{lb/ft}^2)$$

در فشار گیج، p_0 صفر می باشد

that $p_0 = 0$

$$p_1 = 721\ \text{lb/ft}^2$$

$$p_1 = \frac{721\ \text{lb/ft}^2}{144\ \text{in.}^2/\text{ft}^2} = 5.01\ \text{lb/in.}^2$$

$$\frac{p_1}{\gamma_{H_2O}} = \frac{721\ \text{lb/ft}^2}{62.4\ \text{lb/ft}^3} = 11.6\ \text{ft}$$

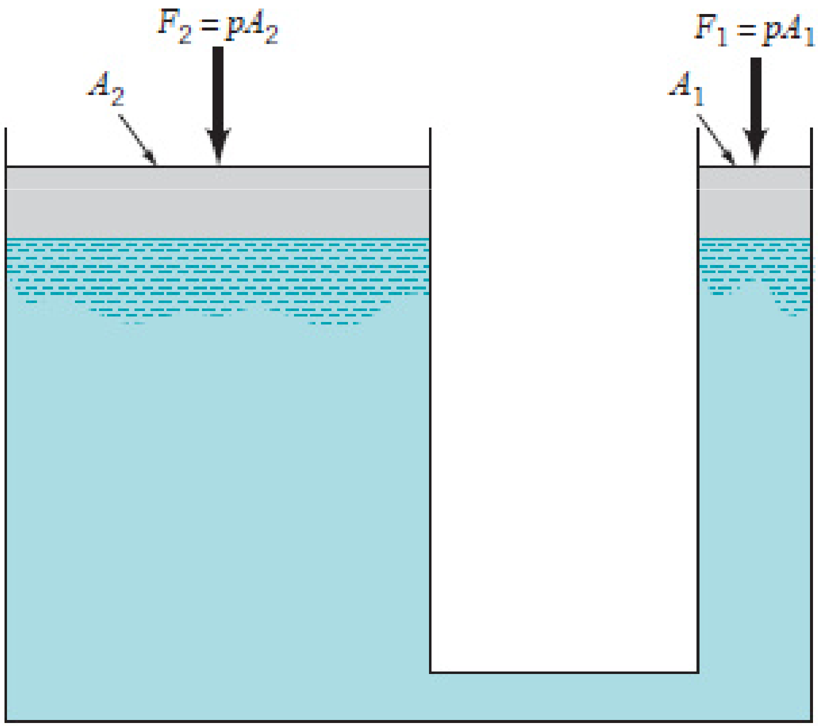
$$p_2 = \gamma_{H_2O} h_{H_2O} + p_1$$
$$= (62.4\ \text{lb/ft}^3)(3\ \text{ft}) + 721\ \text{lb/ft}^2$$
$$= 908\ \text{lb/ft}^2$$

$$p_2 = \frac{908\ \text{lb/ft}^2}{144\ \text{in.}^2/\text{ft}^2} = 6.31\ \text{lb/in.}^2$$

$$\frac{p_2}{\gamma_{H_2O}} = \frac{908\ \text{lb/ft}^2}{62.4\ \text{lb/ft}^3} = 14.6\ \text{ft}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology


A_2
A_1


$F_2 = pA_2$
A_2
$F_1 = pA_1$
A_1

Compressible Fluid

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

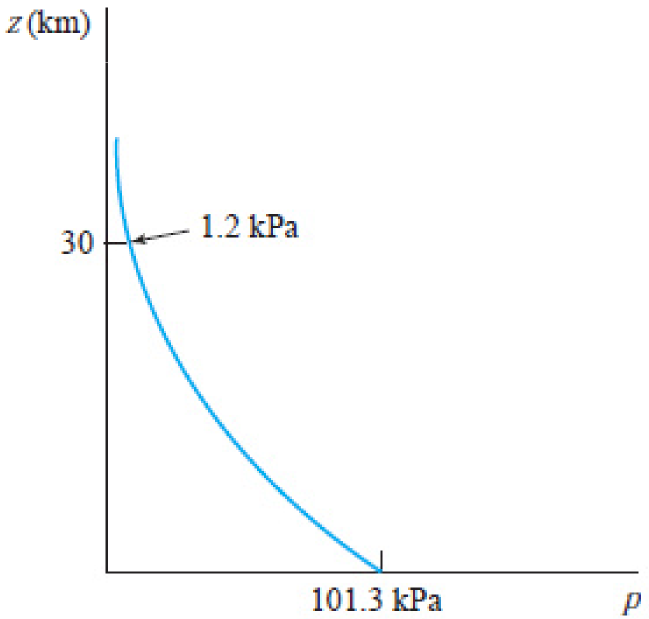
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \equiv -\gamma$$

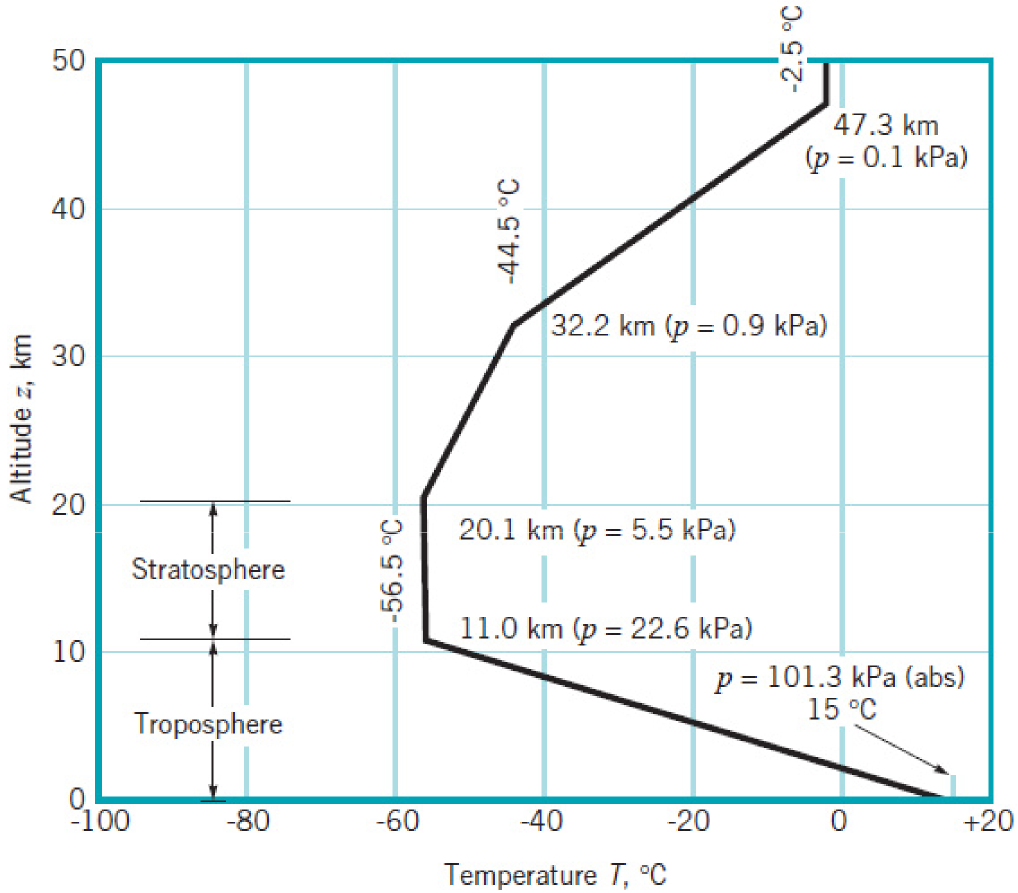
$$\frac{dp}{dz} = -\frac{gp}{RT}$$

با فرض ثابت بودن مقادیر g و R، باید تغییرات دما بر اساس ارتفاع را دانست تا بتوان انتگرال مقابل را محاسبه نمود.

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{T}$$

$$(isothermal\ \text{conditions})\quad p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0}\right]$$





By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

Properties of U.S. Standard Atmosphere at Sea Level[a]

Property	SI Units	BG Units
Temperature, T	288.15 K (15 °C)	518.67 °R (59.00 °F)
Pressure, p	101.33 kPa (abs)	2116.2 lb/ft^2 (abs) [14.696 lb/in.^2 (abs)]
Density, ρ	1.225 kg/m^3	0.002377 slugs/ft^3
Specific weight, γ	12.014 N/m^3	0.07647 lb/ft^3
Viscosity, μ	$1.789 \times 10^{-5}\ \text{N} \cdot \text{s/m}^2$	$3.737 \times 10^{-7}\ \text{lb} \cdot \text{s/ft}^2$

[a]Acceleration of gravity at sea level = 9.807 m/s^2 = 32.174 ft/s^2.

$$p = p_a\left(1 - \frac{\beta z}{T_a}\right)^{g/R\beta}$$

$$R = 286.9 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\beta = 0.00650 \text{ K/m}$$

انحراف

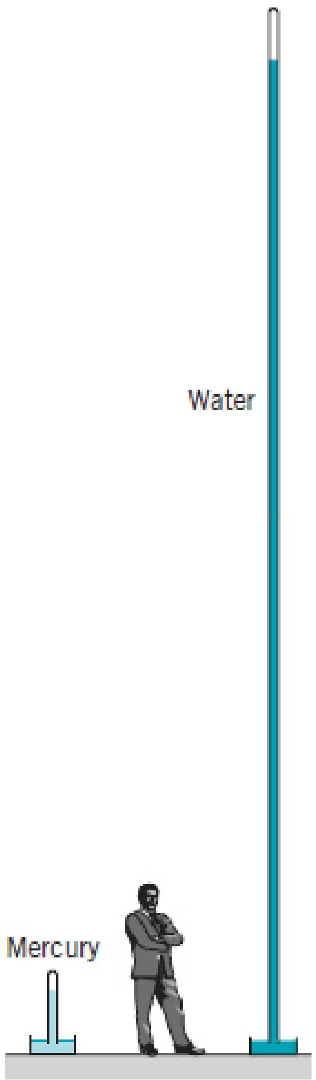
T_a is the temperature at sea level ($z = 0$) and β is the *lapse rate*

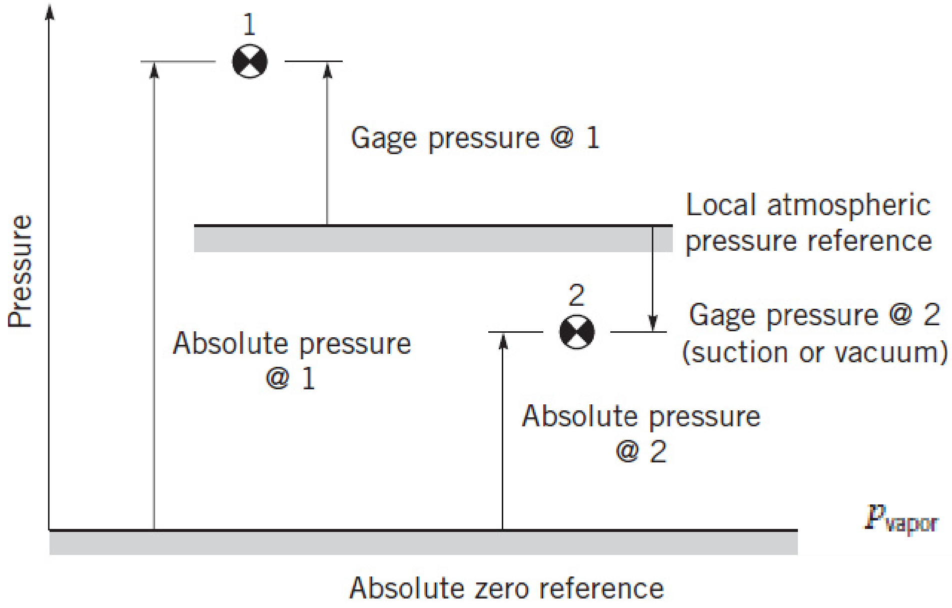
troposphere, where the temperature is −56.5 °C, the absolute pressure is about 23 kPa (3.3 psia).

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

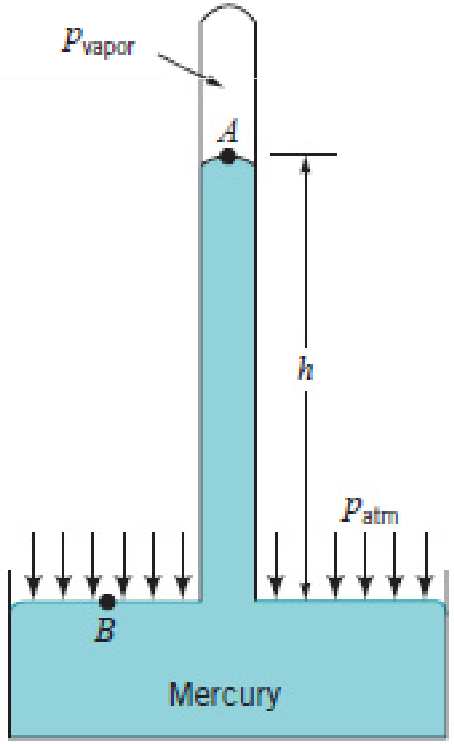
اندازه گیری فشار

فشار مطلق بر اساس مقایسه با خلاء اندازه گیری شده و فشار گیج در مقایسه با فشار استاندارد محلی اندازه گیری می شود





ساده ترین وسیله برای اندازه گیری فشار اتمسفر، بارومتر جیوه ای است



$$p_{atm} = \gamma h + p_{vapor}$$

p_{vapor} مقدار بسیار کوچک

$$p_{atm} \approx \gamma h$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: متوسط دمای آب در یاچه ای در بالای یک کوه ۱۰ درجه سانتی گراد بوده و حداکثر عمق این دریاچه ۴۰ متر است. در صورتی که فشار بارومتریک در دریاچه ۵۹۸ میلی متر جیوه باشد، فشار مطلق در عمیق ترین جای دریاچه بر حسب پاسکال چند است؟

$$p = \gamma h + p_0$$

فشار در هر عمق از دریاچه

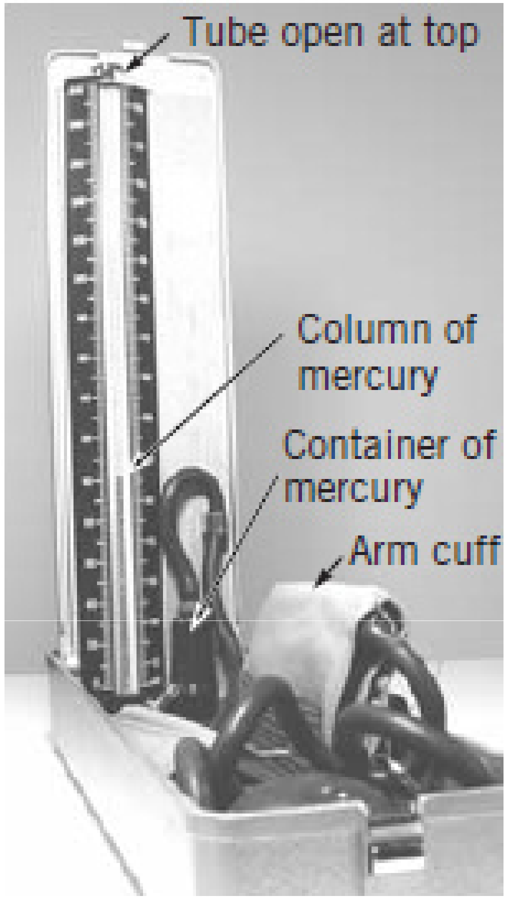
تبدیل فشار بارومتریک به پاسکال

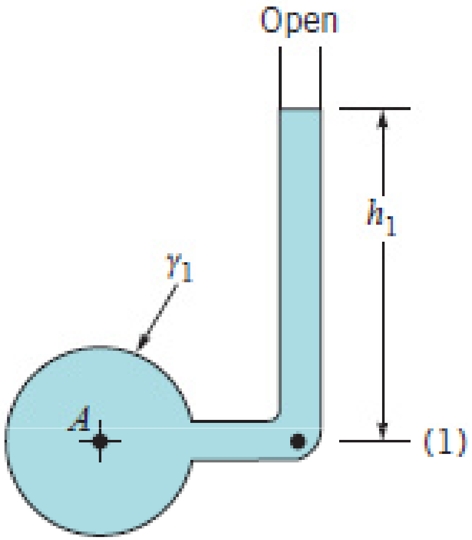
$$\left.\begin{aligned} \frac{p_{\text{barometric}}}{\gamma_{\text{Hg}}} &= 598 \text{ mm} = 0.598 \text{ m} \\ \gamma_{\text{Hg}} &= 133 \text{ kN/m}^3 \end{aligned}\right\} \quad p_0 = (0.598 \text{ m})(133 \text{ kN/m}^3) = 79.5 \text{ kN/m}^2$$

$$\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 9.804 \text{ kN/m}^3 \text{ at } 10\ ^\circ\text{C}$$

$$\begin{aligned} p &= (9.804 \text{ kN/m}^3)(40 \text{ m}) + 79.5 \text{ kN/m}^2 \\ &= 392 \text{ kN/m}^2 + 79.5 \text{ kN/m}^2 \\ &= 472 \text{ kPa (abs)} \end{aligned}$$

مانومتر: وسیله ای برای اندازه گیری فشار بوده که بصورت عمودی و مایل قابل استفاده است



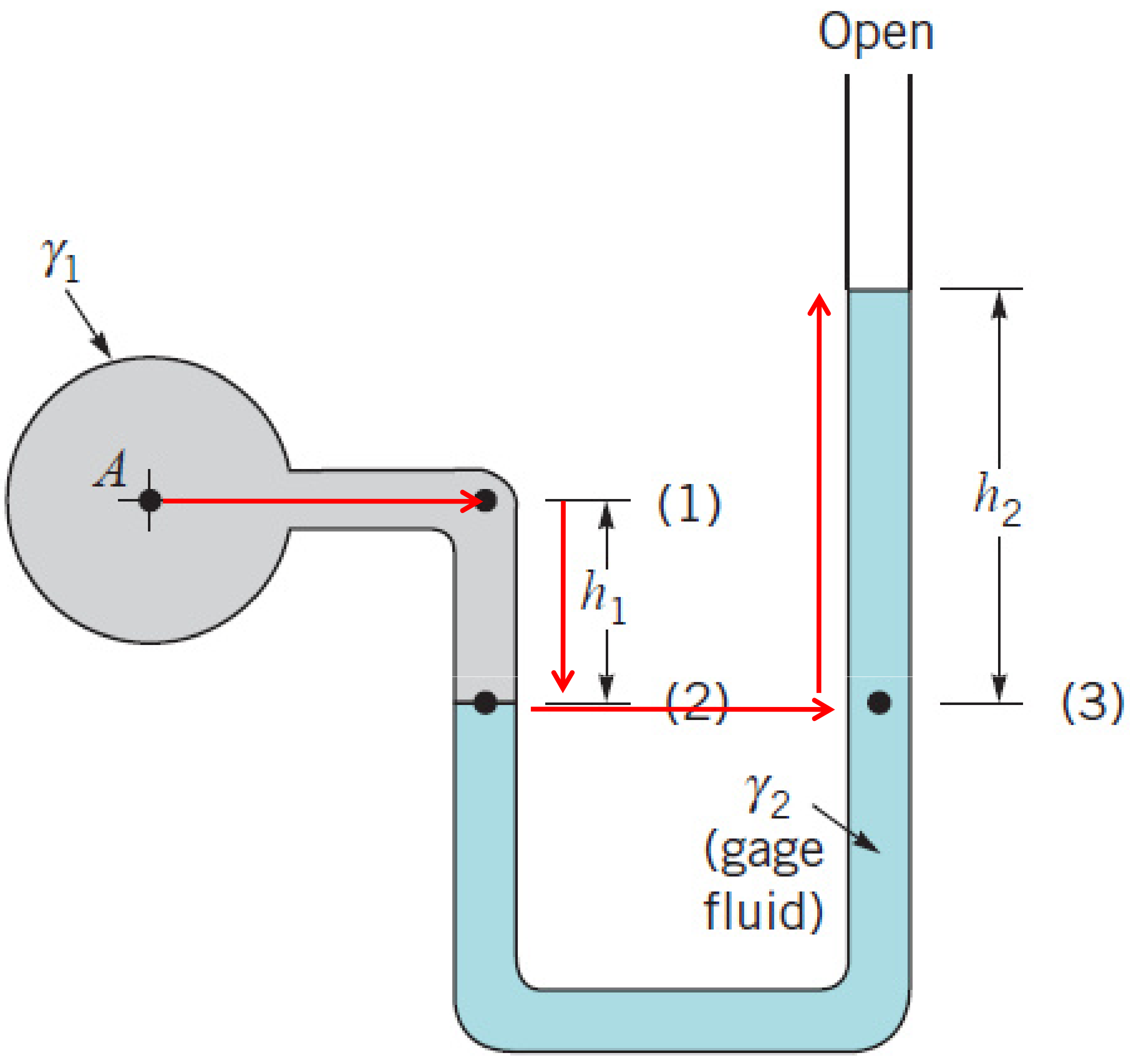


$$p = \gamma h + p_0$$

$$p_A = \gamma_1 h_1$$

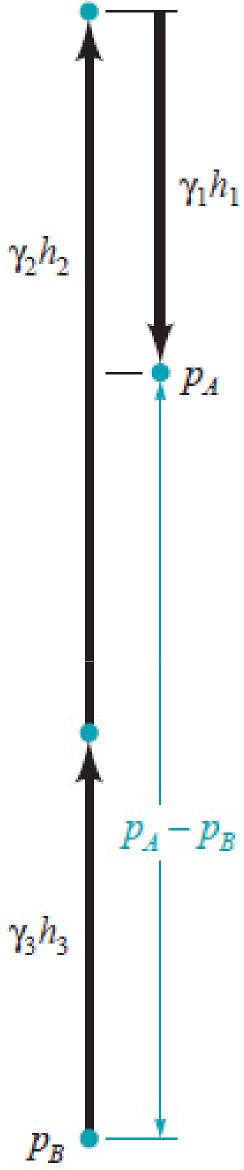
نکته: وقتی قسمت بالای لوله باز باشد به معنی این است که با محیط بیرون در ارتباط بوده و می توان مقدار P_0 را صفر در نظر گرفت (فشار گیج)

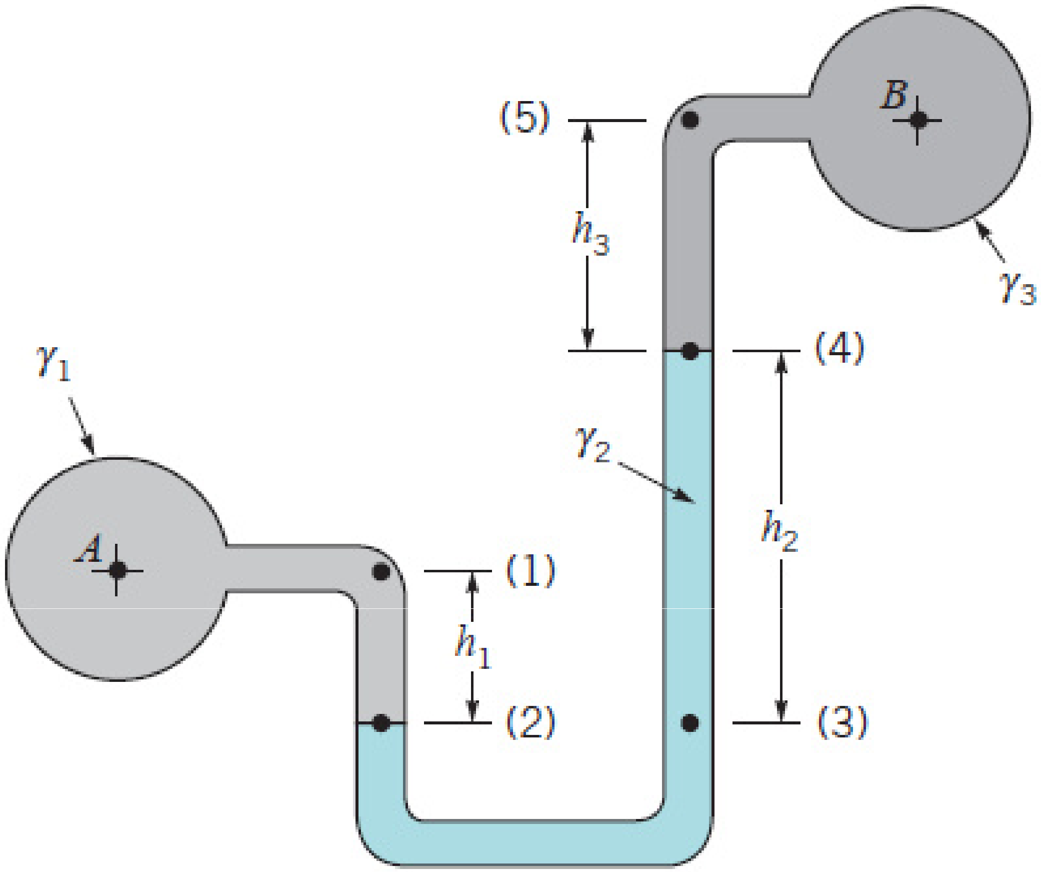
مانومتر ساده U شکل



$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 = 0$$

$$p_A = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1$$





$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3 = p_B$$

$$p_A - p_B = \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

مثال: یکی از روشهای محاسبه دبی در داخل یک لوله، استفاده از اریفیس می باشد. در این روش با استفاده از اختلاف فشار دو طرف اریفیس می توان مقدار دبی را بدست آورد.

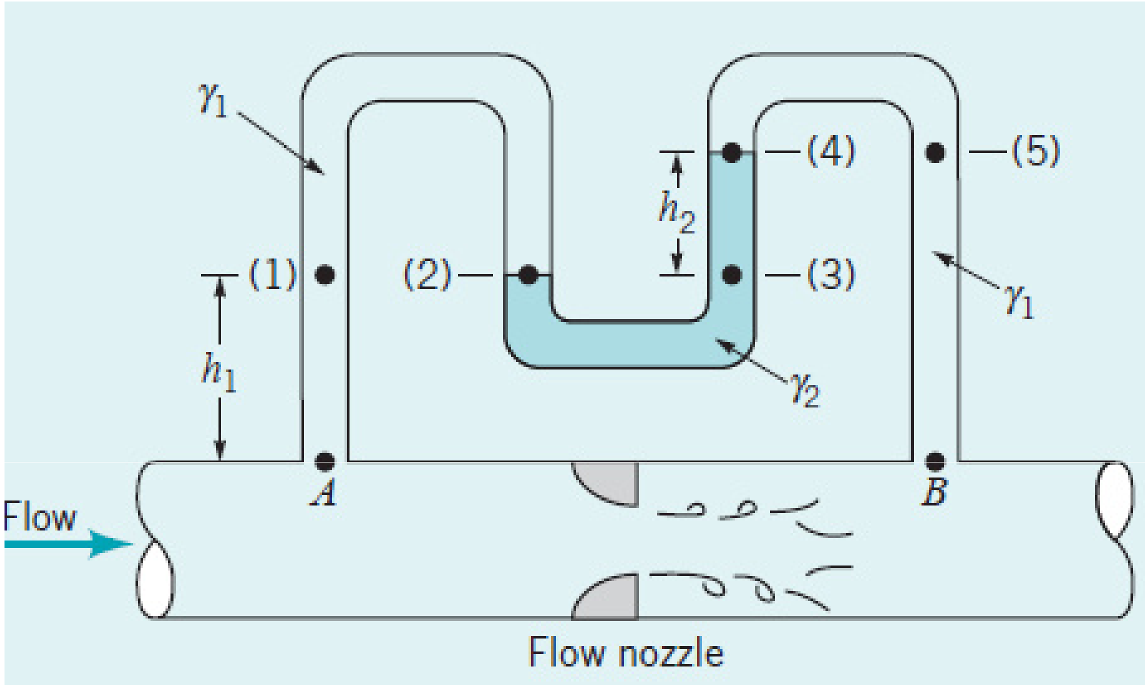
$Q = K\sqrt{p_A - p_B}$, where K is a constant

الف) رابطه ای برای اختلاف فشار بین نقاط A و B به صورت پارامتری بدست آورید.

ب) با استفاده از مقادیر ذیل افت فشار چند است؟

$$\gamma_1 = 9.80 \text{ kN/m}^3, \gamma_2 = 15.6 \text{ kN/m}^3$$

$$h_1 = 1.0 \text{ m, and } h_2 = 0.5 \text{ m}$$



$$p_A - \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 + \gamma_1(h_1 + h_2) = p_B$$

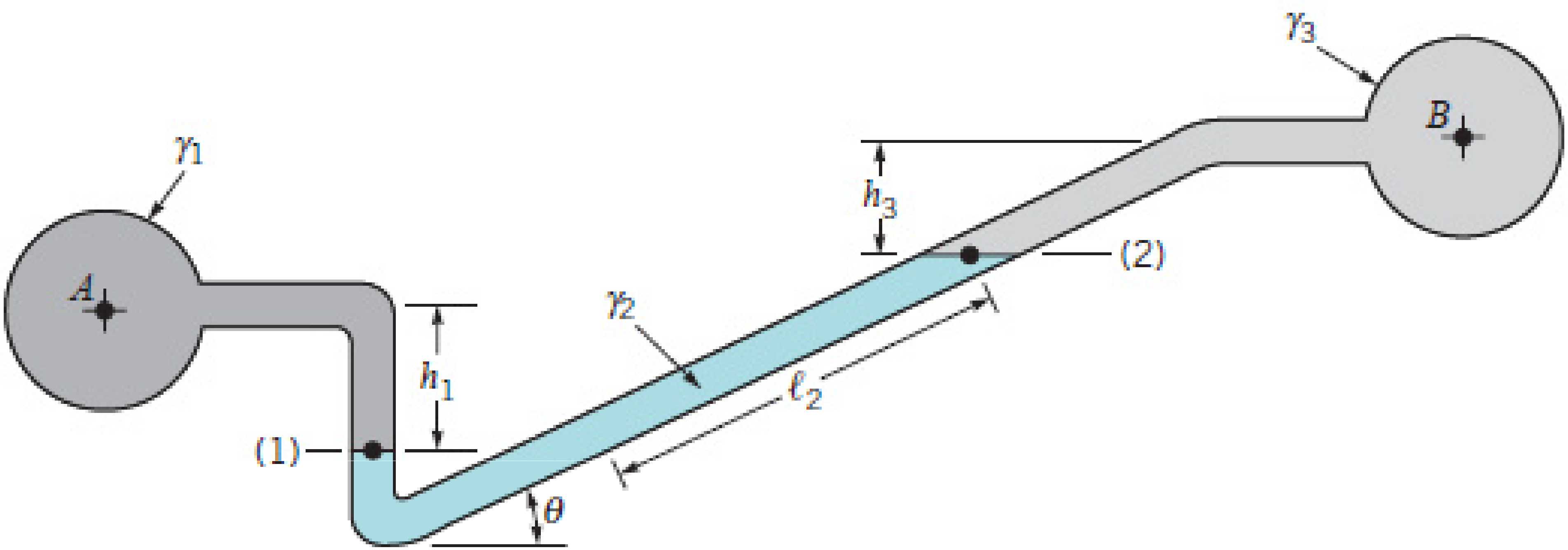
$$\boxed{p_A - p_B = h_2(\gamma_2 - \gamma_1)}$$

$$p_A - p_B = (0.5 \text{ m})(15.6 \text{ kN/m}^3 - 9.80 \text{ kN/m}^3) = 2.90 \text{ kPa}$$

توجه: در صورتی که اختلاف فشار کم باشد و اختلاف وزن مخصوص ها نیز زیاد نباشد، مقدار ارتفاع مورد نیاز به منظور دقت مناسب برای قرائت افزایش می یابد

$$\boxed{h_2 = (p_A - p_B)/(\gamma_2 - \gamma_1)}$$

مانومتر مایل برای اختلاف فشار های کوچک از این مانومتر استفاده می شود



$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 \ell_2 \sin\theta - \gamma_3 h_3 = p_B$$

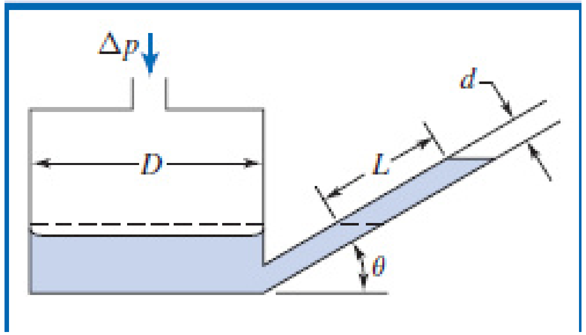
$$p_A - p_B = \gamma_2 \ell_2 \sin\theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

در صورتی که در نقاط A و B شامل گاز بوده و اختلاف بین h1 و h3 قابل صرفنظر کردن باشند، نتیجه می شود:

$$p_A - p_B = \gamma_2 \ell_2 \sin\theta \Rightarrow \ell_2 = \frac{p_A - p_B}{\gamma_2 \sin\theta}$$

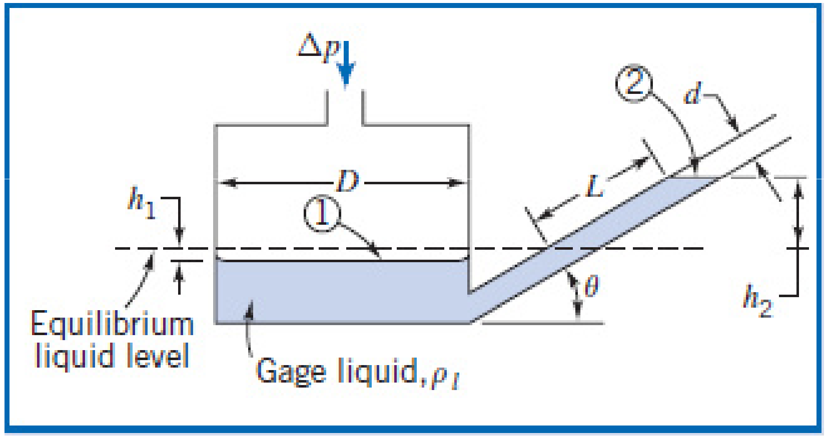
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: در شکل مقابل یک مانومتر مایل به منظور اندازه گیری فشار داخل یک مخزن استفاده میشود. ارتباط میان L و اختلاف فشار بیابید. در ادامه در ارتباط با حساسیت این مانومتر بحث نمایید.



$$p - p_0 = \Delta p = \rho g h \;\rightarrow\; p_1 - p_2 = \Delta p = \rho_l g(h_1 + h_2)$$

برای ثابت ماندن سطح مانومتر باید حجم سیال جابجا شده در مخزن با حجم سیال بالا آمده در مانومتر یکسان باشد



$$\frac{\pi D^2}{4}h_1 = \frac{\pi d^2}{4}L \quad \text{or} \quad h_1 = L\left(\frac{d}{D}\right)^2$$

$$h_2 = L\sin\theta.$$

$$\Delta p = \rho_l g\left[L\sin\theta + L\left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = \rho_l g L\left[\sin\theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$$

$$L = \frac{\Delta p}{\rho_l g\left[\sin\theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]}$$

به منظور یافتن حساسیت مانومتر باید دقت آن را با یک مانومتر U شکل که سیال آن آب می باشد مقایسه نمود

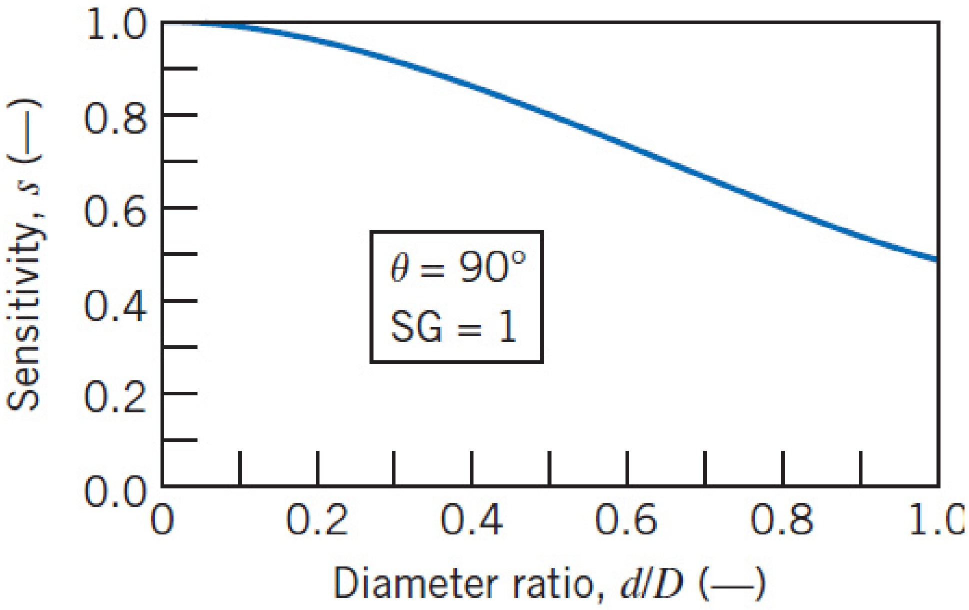
$$h = \frac{\Delta p}{\rho g}$$

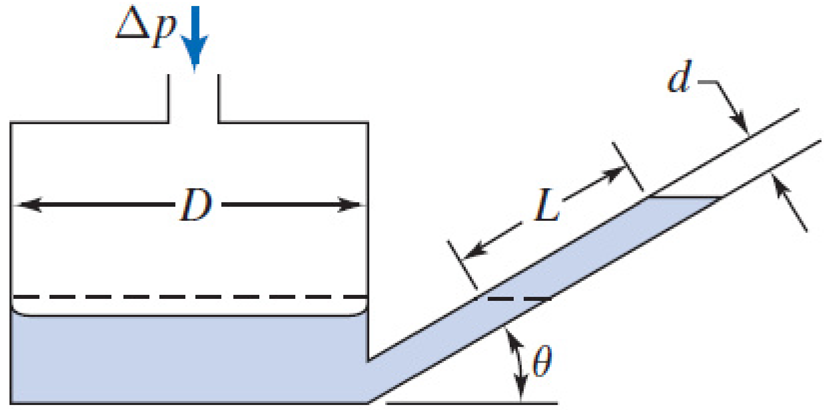
The sensitivity s is then

$$s = \frac{L}{h} = \frac{1}{SG_l\left[\sin\theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]}$$

$$SG_l = \rho_l/\rho$$

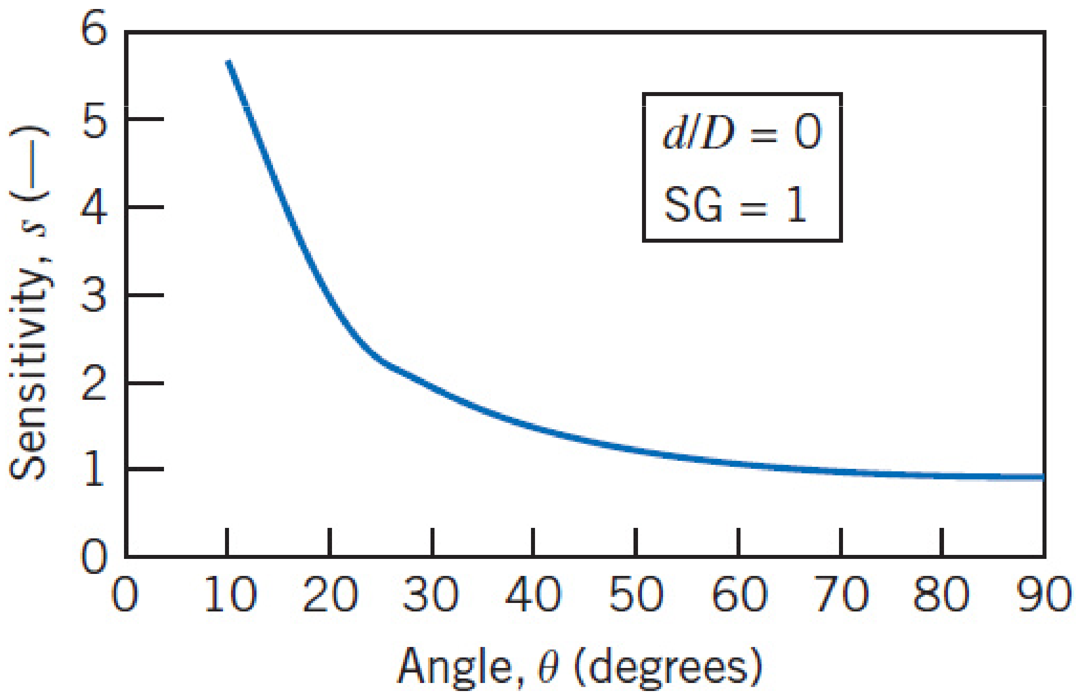
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology





(SG = 0.8, d/D = 0.1, and θ = 10 degrees)

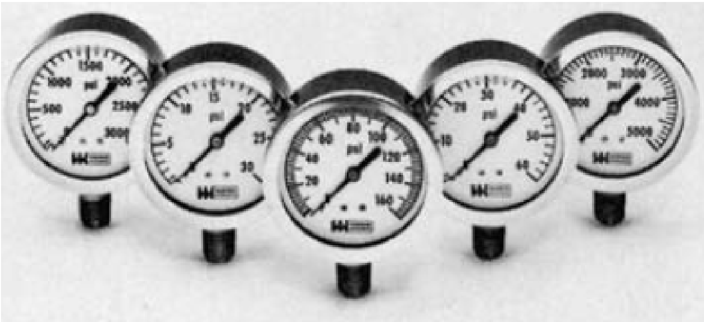
sensitivity of 6.81

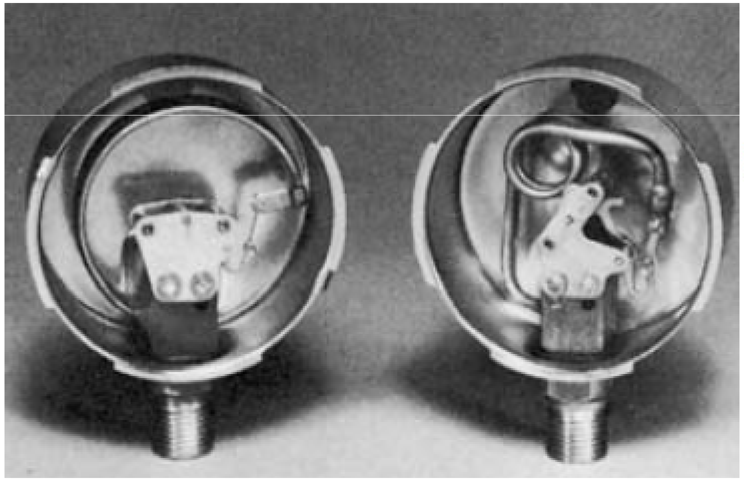


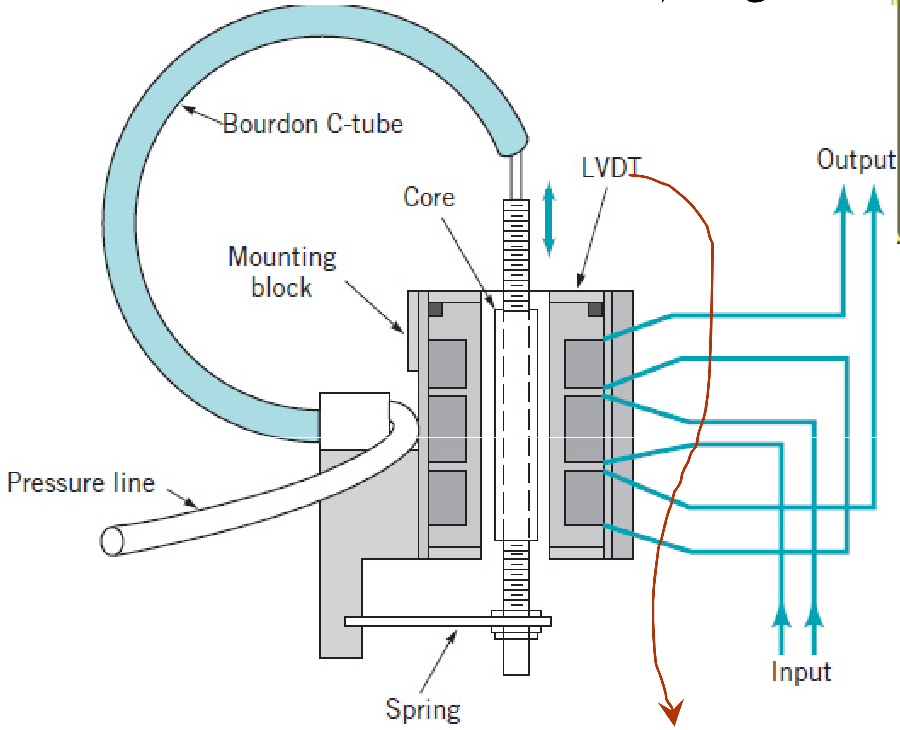
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol
University of Technology

اگرچه مانومتر وسیله مناسبی برای اندازه گیری فشار می باشد، ولی برای فشارهای بالا و برای تغییرات ناگهانی فشار این تجهیز مناسب نیست. در این راستا تجهیزات مختلفی تهیه شده اند که در اکثر آنها با استفاده از تغییرات یک سازه ارتجاعی که در برابر تغییر فشار دچار تغییر شکل می شود استفاده می شود. ***Bourdon pressure gage***

نمایش فیلم V2-2

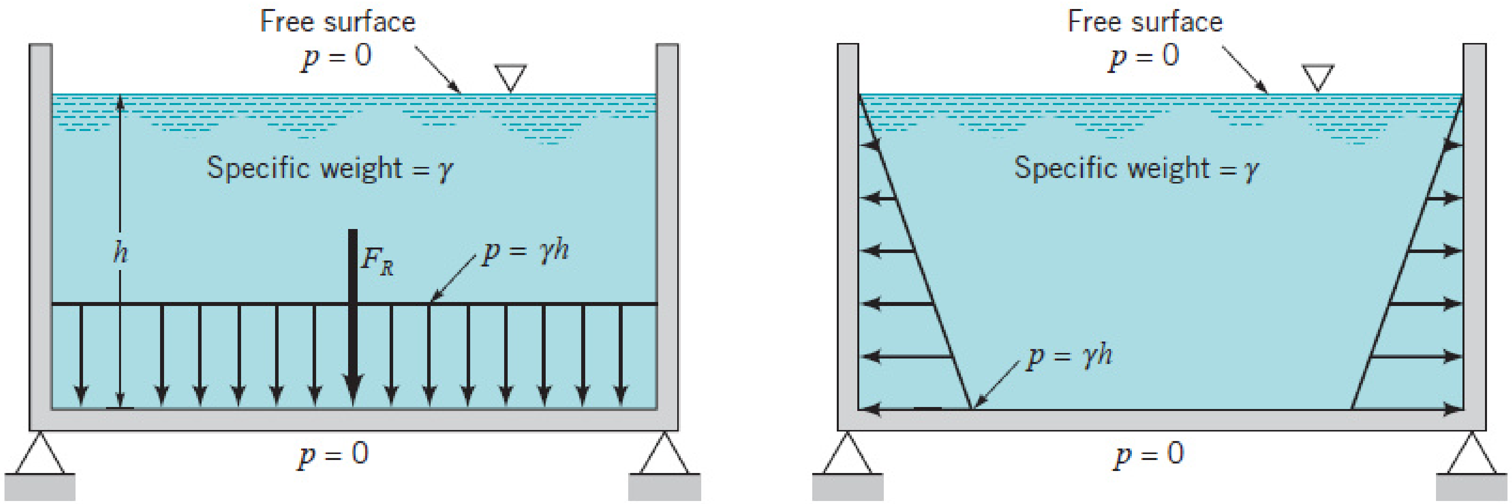




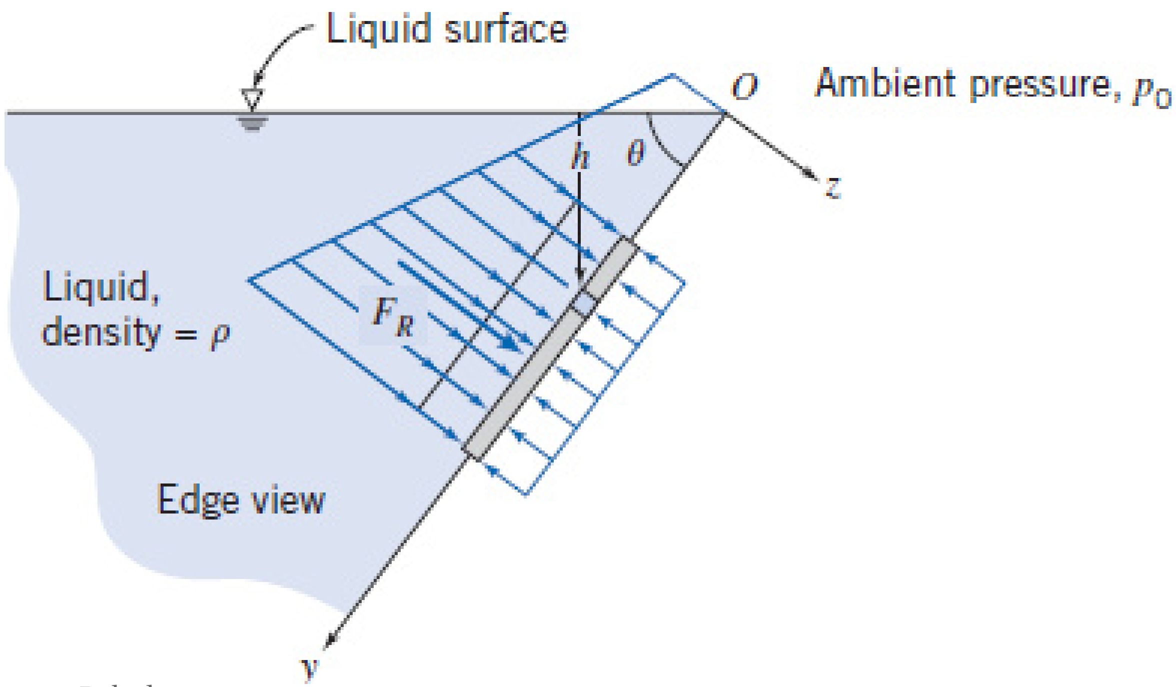


linear variable differential transformer (LVDT)

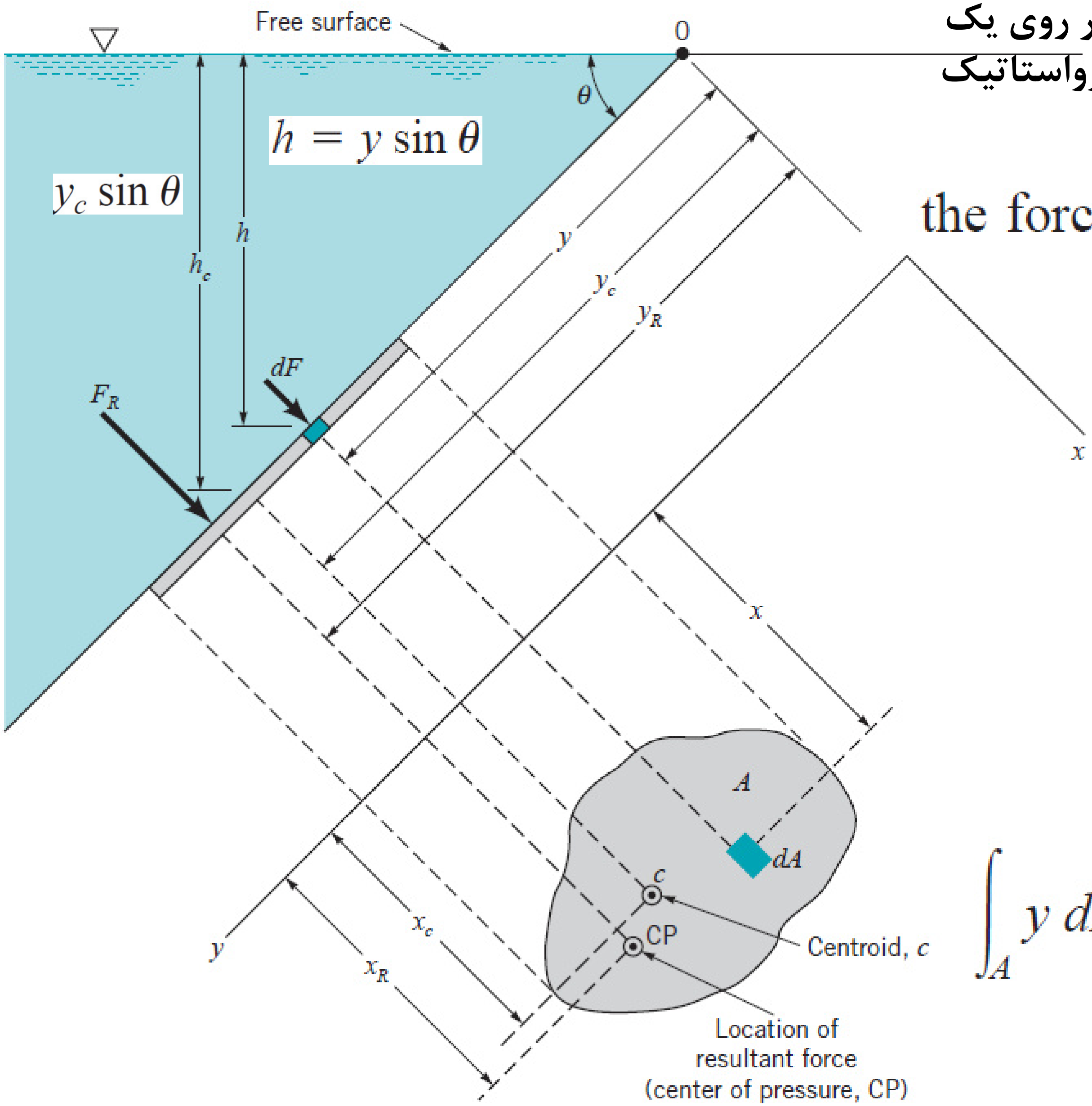
نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح



(*a*) Pressure on tank bottom (*b*) Pressure on tank ends



هدف یافتن اندازه، جهت و مکان نیروی وارده بر روی یک جسم مایل و مسطح که تحت تاثیر نیروی هیدرواستاتیک قرار دارد



the force acting on dA ➡ $dF = \gamma h \, dA$

$$F_R = \int_A \gamma h \, dA = \int_A \gamma y \sin\theta \, dA$$

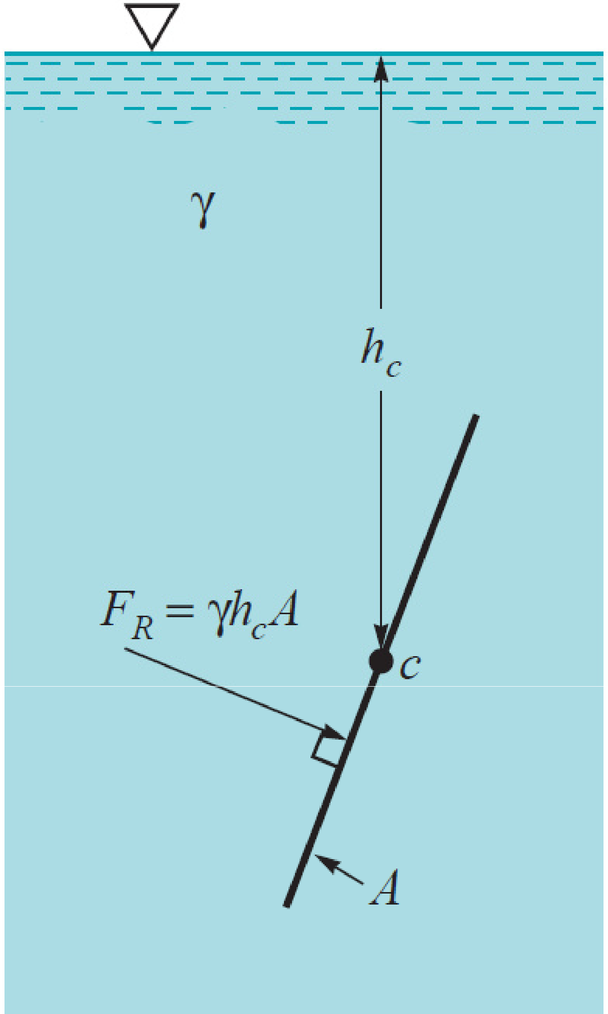
For constant γ and θ

$$F_R = \gamma \sin\theta \underbrace{\int_A y \, dA}_{\text{the first moment of the area}}$$

$$\int_A y \, dA = y_c A \quad \Rightarrow \quad F_R = \gamma A y_c \sin\theta$$

$$\boxed{F_R = \gamma h_c A}$$

h_c فاصله عمودی سطح سیال از مرکز سطح می باشد.



نیروی هیدرواستاتیک وابسته به وزن مخصوص سیال، ارتفاع عمودی سیال از مرکز سطح جسم و سطح جسم وابسته است

γh_c → **فشار در مرکز سطح سیال** → $F_R = P_c A$

نقطه اثر نیرو کجاست؟ y_R

جهت یافتن محل اثر نیروی برآیند، باید مقدار گشتاور حاصل از نیروی برآیند بر نقطه اثر با مجموع گشتاور حاصل از نیروی گسترده ناشی از نیروی هیدرواستاتیک برابر باشد.

$$\left.\begin{aligned} F_R y_R &= \int_A y\, dF = \int_A \gamma \sin\theta\, y^2\, dA \\ F_R &= \gamma A y_c \sin\theta \end{aligned}\right\} \quad y_R = \frac{\int_A y^2\, dA}{y_c A}$$

the *second moment of the area (moment of inertia),* I_x,

$$y_R = \frac{I_x}{y_c A}$$

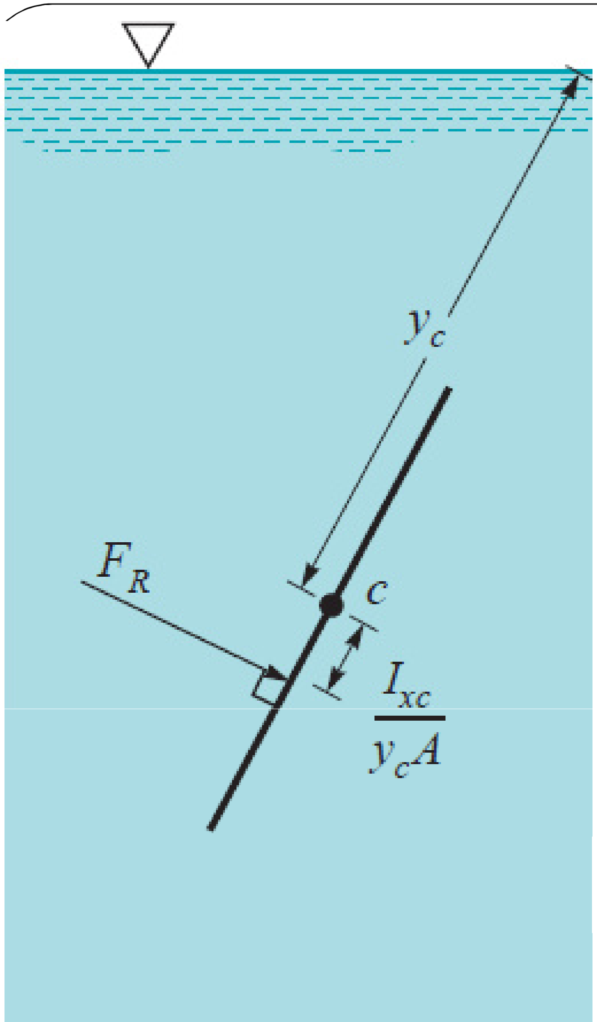
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

با استفاده از تئوری محورهای موازی برای بیان ممان اینرسی خواهیم داشت:

$$I_x = I_{xc} + Ay_c^2$$

I_{xc} ممان دوم سطح نسبت به محور عبوری از مرکز سطح است که موازی محور x است.

$$y_R = \frac{I_x}{y_c A} \rightarrow \boxed{y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c}$$



نکته: برای سطوح غیر افقی، همیشه محل اثر نیروی برآیند پایینتر از مرکز سطح جسم می باشد.

$$I_{xc}/y_c A > 0$$

$$x_R \rightarrow F_R x_R = \int_A \gamma \sin\theta \, xy \, dA \rightarrow x_R = \frac{\int_A xy \, dA}{y_c A} = \frac{I_{xy}}{y_c A}$$

ممان اینرسی نسبت به محور x و y

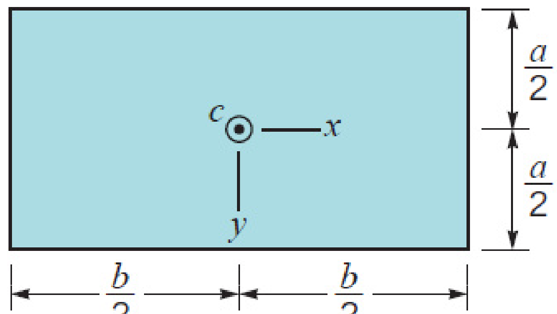
$$\boxed{x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

نکته: برای اجسامی که دارای محور تقارن بموازی با یکی از محور مختصات عبوری ازمرکز سطح باشد، I_{xyc} صفر می شود.

نکته: با افزایش y_c ، مرکز فشار به مرکز سطح نزدیک می شود. این مطلب یعنی هرچه عمق غوطه وری بیشتر باشد این نزدیکی بیشتر است

$$y_c = h_c/\sin\theta$$

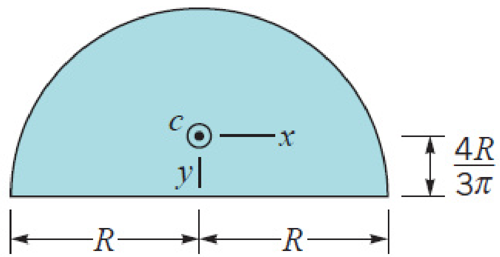


$A = ba$

$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$

$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$

$I_{xyc} = 0$

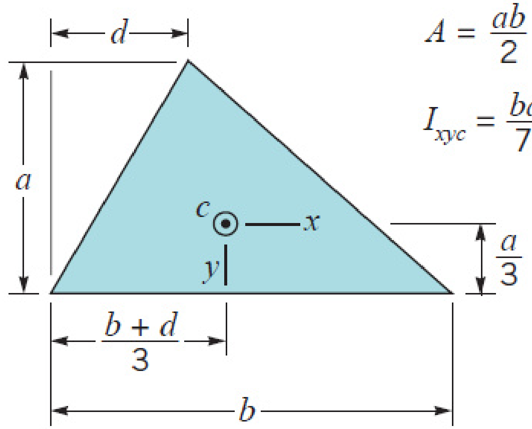


$A = \frac{\pi R^2}{2}$

$I_{xc} = 0.1098R^4$

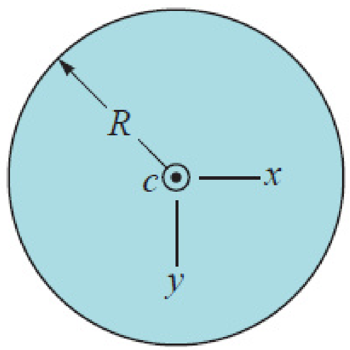
$I_{yc} = 0.3927R^4$

$I_{xyc} = 0$



$A = \frac{ab}{2}$ $\quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$

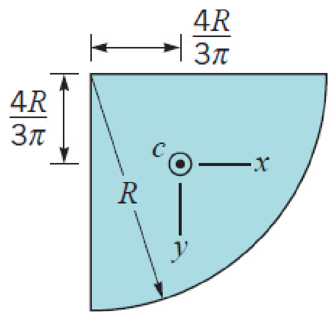
$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$



$A = \pi R^2$

$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$

$I_{xyc} = 0$



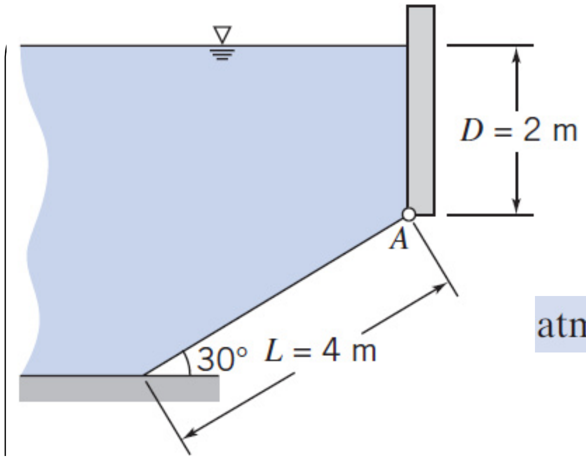
$A = \frac{\pi R^2}{4}$

$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$

$I_{xyc} = -0.01647R^4$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: صفحه ای مایل به پهنای ۵ متر در نقطه A در یک استخر قرار گرفته است. نیروی موثر و محل اثر آن را بدست آورید.



$$p = p_0 + \rho g h \quad F_R = \int_A p\, dA$$

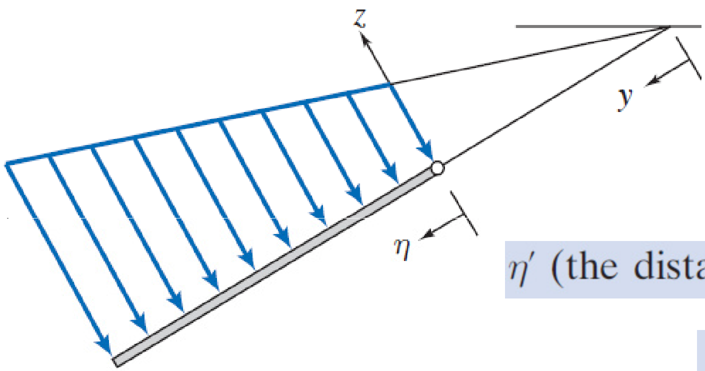
$$h = D + \eta \sin 30^\circ$$

$$dA = w\, d\eta$$

atmospheric pressure p_0 acts on both sides

$$\Rightarrow p = \rho g h$$

$$F_R = \int_A p dA = \int_0^L \rho g (D + \eta \sin 30^\circ) w\, d\eta$$



Net hydrostatic pressure distribution on gate.

$$= \rho g w \left[D\eta + \frac{\eta^2}{2} \sin 30^\circ \right]_0^L = \rho g w \left[DL + \frac{L^2}{2} \sin 30^\circ \right]$$

$$F_R = 588 \text{ kN}$$

η' (the distance from the top edge of the plate)

$$\eta' F_R = \int_A \eta p\, dA$$

$$\eta' = \frac{1}{F_R} \int_A \eta p dA = \frac{1}{F_R} \int_0^L \eta p w\, d\eta = \frac{\rho g w}{F_R} \int_0^L \eta (D + \eta \sin 30^\circ)\, d\eta$$

$$= \frac{\rho g w}{F_R} \left[\frac{D\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{3} \sin 30^\circ \right]_0^L = \frac{\rho g w}{F_R} \left[\frac{DL^2}{2} + \frac{L^3}{3} \sin 30^\circ \right]$$

$$\eta' = 2.22 \text{ m} \quad \text{and} \quad y' = \frac{D}{\sin 30^\circ} + \eta' = \frac{2 \text{ m}}{\sin 30^\circ} + 2.22 \text{ m} = 6.22 \text{ m}$$

$$x' F_R = \int_A x p\, dA \Rightarrow x' = \frac{1}{F_R} \int_A x p\, dA$$

$x = w/2$ مرکز سطح

$$x' = \frac{1}{F_R} \int_A \frac{w}{2} p\, dA = \frac{w}{2F_R} \int_A p\, dA = \frac{w}{2} = 2.5 \text{ m}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

روش دوم حل-روش جبری

$$F_R = p_c A = \rho g h_i A = \rho g \left(D + \frac{L}{2} \sin 30^\circ \right) L w$$

$$F_R = \rho g w \left[D L + \frac{L^2}{2} \sin 30^\circ \right]$$

$$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{A y_c}$$

$$y_c = \frac{D}{\sin 30^\circ} + \frac{L}{2} = \frac{2\ \text{m}}{\sin 30^\circ} + \frac{4\ \text{m}}{2} = 6\ \text{m}$$

$$A = L w = 4\ \text{m} \times 5\ \text{m} = 20\ \text{m}^2$$

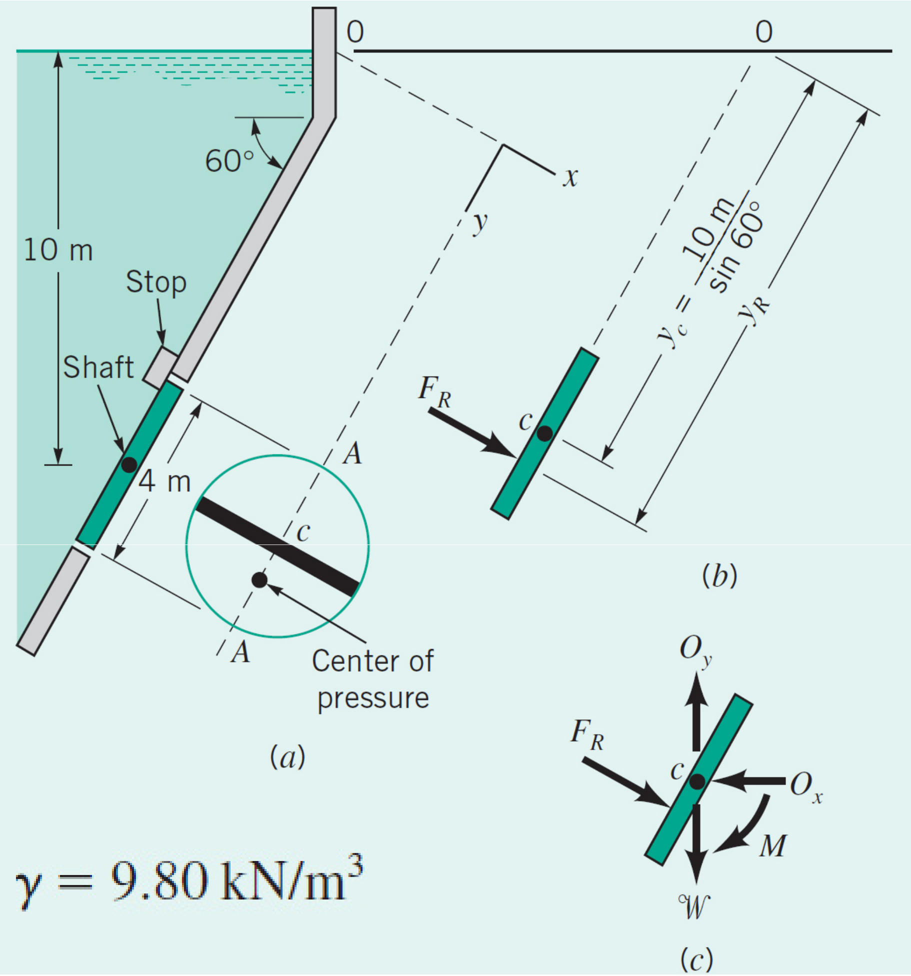
$$I_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{1}{12} w L^3 = \frac{1}{12} \times 5\ \text{m} \times (4\ \text{m})^3 = 26.7\ \text{m}^2$$

$$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{A y_c} = 6\ \text{m} + 26.7\ \text{m}^4 \times \frac{1}{20\ \text{m}^2} \times \frac{1}{6\ \text{m}^2} = 6.22\ \text{m}$$

$$x' = x_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{A y_c}$$

For the rectangular gate $I_{\hat{x}\hat{y}} = 0$ and $x' = x_c = 2.5\ \text{m}$

مثال: در یک منبع آب، یک دریچه با سطح مقطع دایره و قطر ۴ متر بصورت مایل قرار دارد. دریچه بر روی یک محور که بر روی قطر صفحه قرار گرفته متصل شده است. الف) میزان نیروی هیدرواستاتیک و نقطه اثر آن را بدست آورید.
ب)مقدار گشتاور مورد نیاز برای باز کردن دریچه را بدست آورید.



(a) (b) (c)

$\gamma = 9.80\text{ kN/m}^3$

$$F_R = \gamma h_c A$$

$$F_R = (9.80 \times 10^3\text{ N/m}^3)(10\text{ m})(4\pi\text{ m}^2) = 1230 \times 10^3\text{ N} = 1.23\text{ MN}$$

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c \qquad y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c$$

$$x_R = 0 \qquad I_{xc} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$y_R = \frac{(\pi/4)(2\text{ m})^4}{(10\text{ m}/\sin 60°)(4\pi\text{ m}^2)} + \frac{10\text{ m}}{\sin 60°} = 0.0866\text{ m} + 11.55\text{ m} = 11.6\text{ m}$$

$$y_R - y_c = 0.0866\text{ m}$$

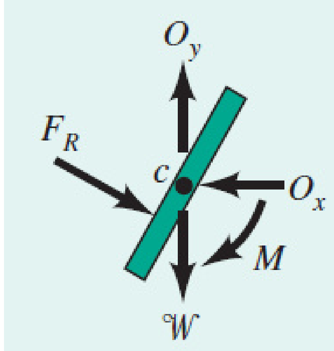
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

$\mathcal{W}$ is the weight of the gate

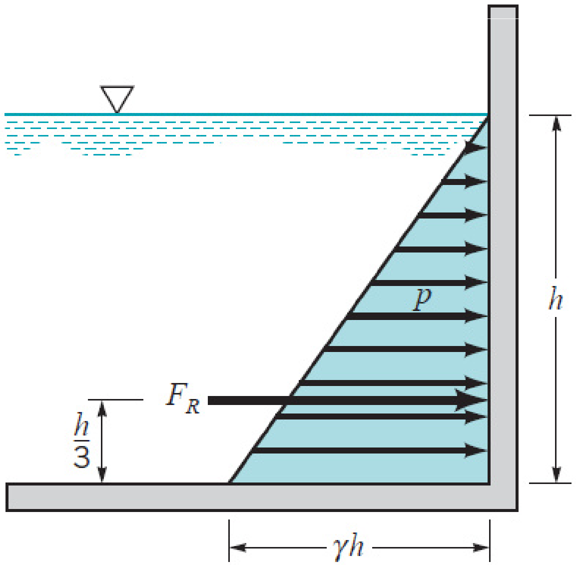
O_x and O_y are the **Horizontal and vertical reactions of the shaft on the gate**

$$\Sigma M_c = 0$$

$$\begin{aligned} M &= F_R(y_R - y_c) \\ &= (1230 \times 10^3 \text{ N})(0.0866 \text{ m}) \\ &= 1.07 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

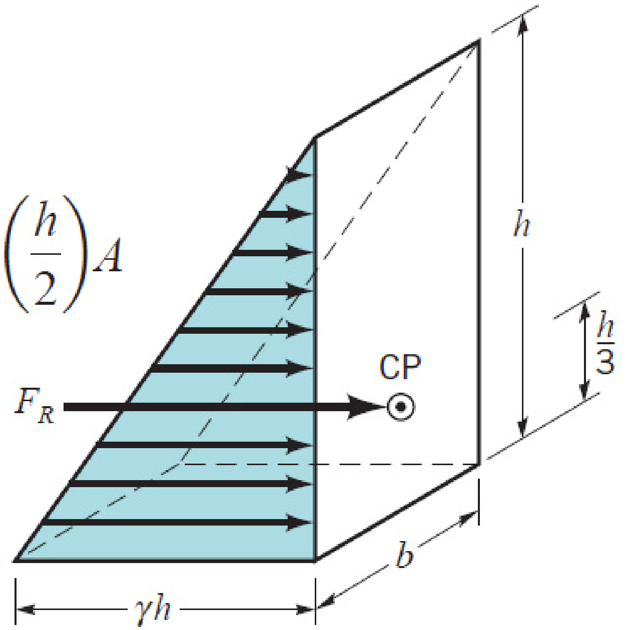


منشور فشار یکی از روشهای یافتن مقدار نیروی هیدرواستاتیک استفاده از روش منشور فشار است. در این روش از حجم منشور فشار می توان برای محاسبه نیرو استفاده نمود



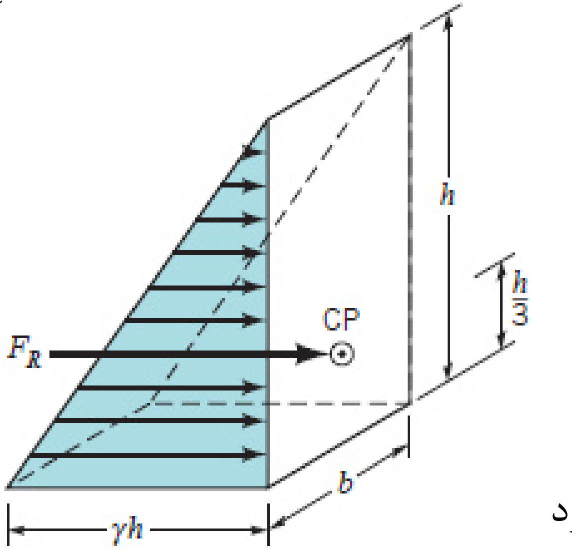
$$F_R = p_{av}\, A = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)A$$

$$F_R = \text{volume} = \frac{1}{2}(\gamma h)(bh) = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)A$$

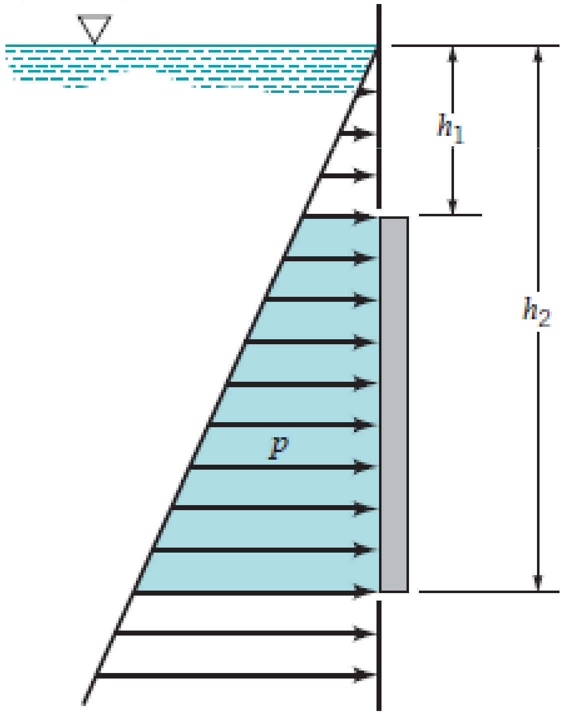


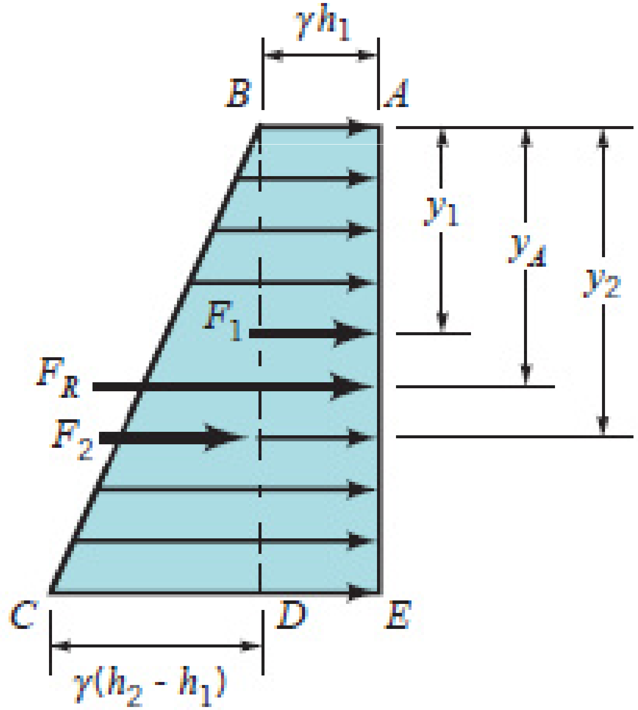
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

- محل اثر نیرو بر روی محور عمودی در مرکز سطح تقارن منشور فشار خواهد بود. به عنوان مثال در شکل مقابل، سطح مقطع عمودی این منشور (هندسه مثلثلی) برای پیدا کردن نقطه اثر نیرو مورد استفاده قرار می گیرد.



- برای اشکال فوق می توان حجم منشور فشار را به دو حجم مختلف BCD و ABDE تقسیم نمود و برای هر حجم بصورت جداگانه محاسبه گردد.

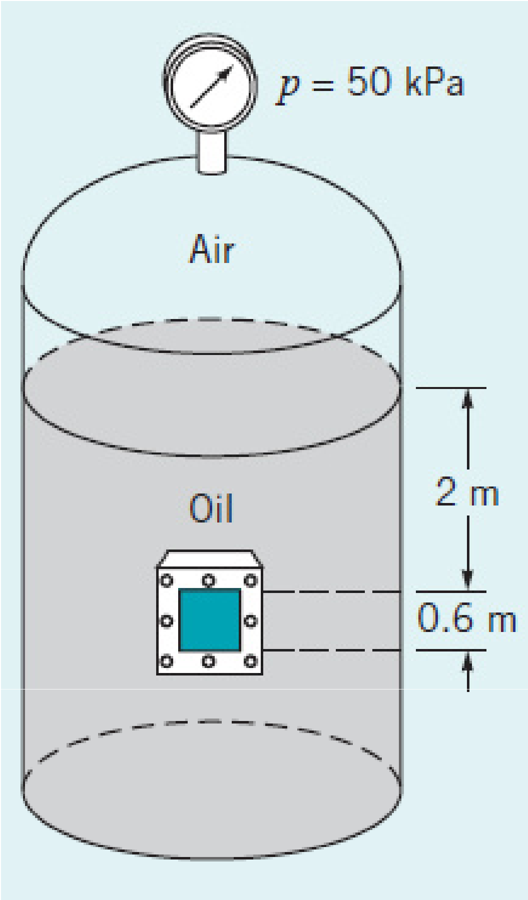


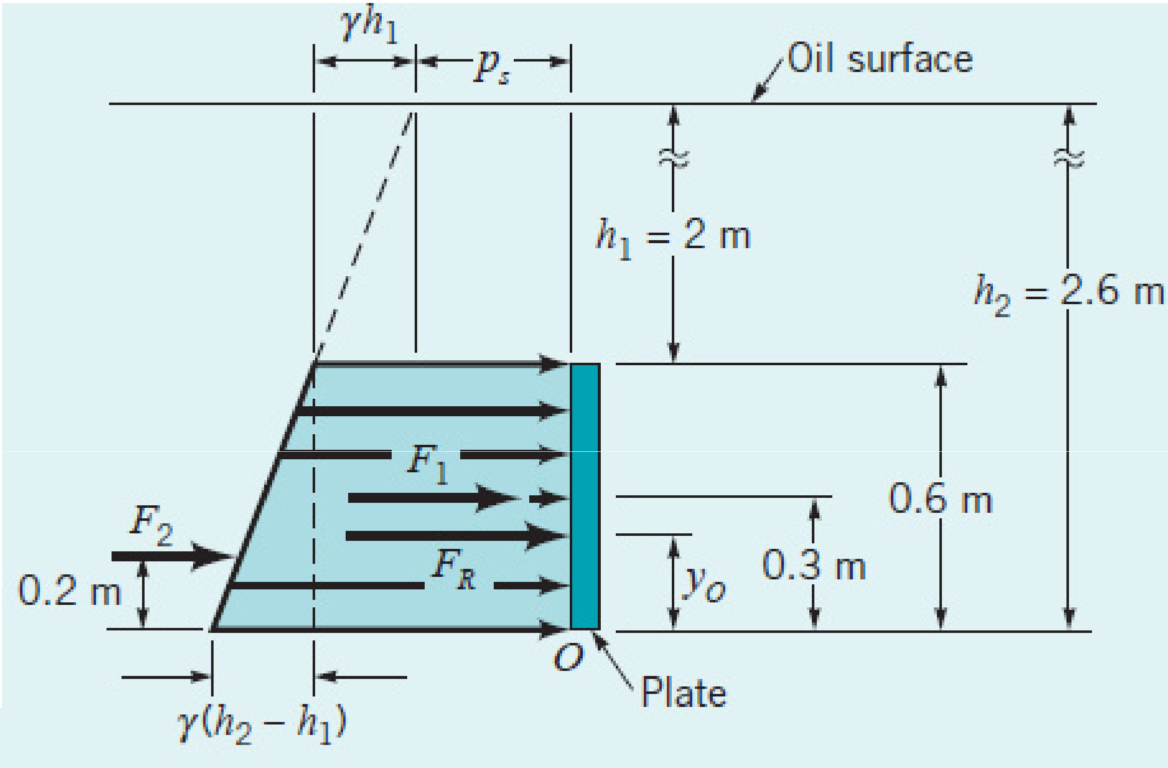


$$F_R = F_1 + F_2$$

$$F_R y_A = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

مثال: در یک مخزن تحت فشار حاوی سیال با SG=0.9 دریچه مربعی به ابعاد 0.6 مترقرار دارد. فشار گیج بالای مخزن 50KPa را نشان داده و خارج از مخزن فشار اتمسفر است. میزان نیروی وارد بر دریچه و محل اثر آن را محاسبه نمایید.





$$\begin{aligned} F_1 &= (p_s + \gamma h_1)A \\ &= [50 \times 10^3\ \mathrm{N/m^2} \\ &\quad + (0.90)(9.81 \times 10^3\ \mathrm{N/m^3})(2\ \mathrm{m})](0.36\ \mathrm{m^2}) \\ &= 24.4 \times 10^3\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

$$F_2 = \gamma\left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)A = (0.90)(9.81 \times 10^3\ \mathrm{N/m^3})\left(\frac{0.6\ \mathrm{m}}{2}\right)(0.36\ \mathrm{m^2})$$

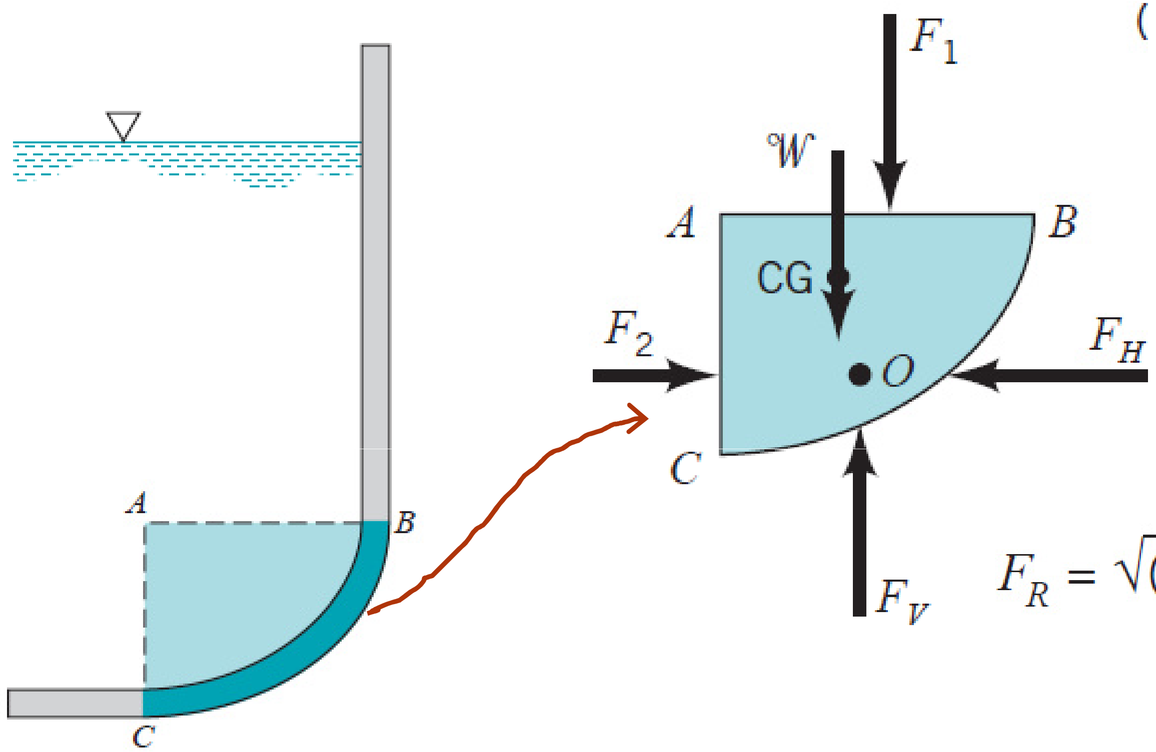
$$= 0.954 \times 10^3\ \mathrm{N}$$

$$F_R = F_1 + F_2 = 25.4 \times 10^3\ \mathrm{N} = 25.4\ \mathrm{kN}$$

$$F_R y_O = F_1(0.3 \text{ m}) + F_2(0.2 \text{ m})$$

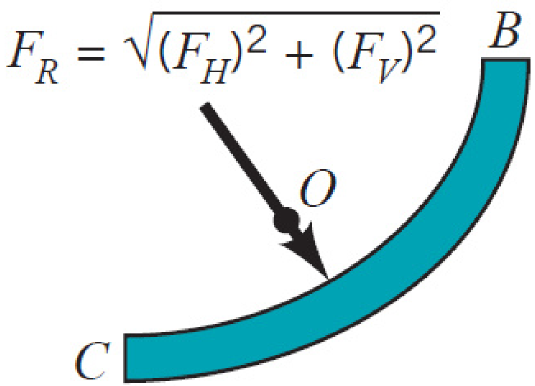
$$y_O = \frac{(24.4 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m}) + (0.954 \times 10^3 \text{ N})(0.2 \text{ m})}{25.4 \times 10^3 \text{ N}} = 0.296 \text{ m}$$

نیروی هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی

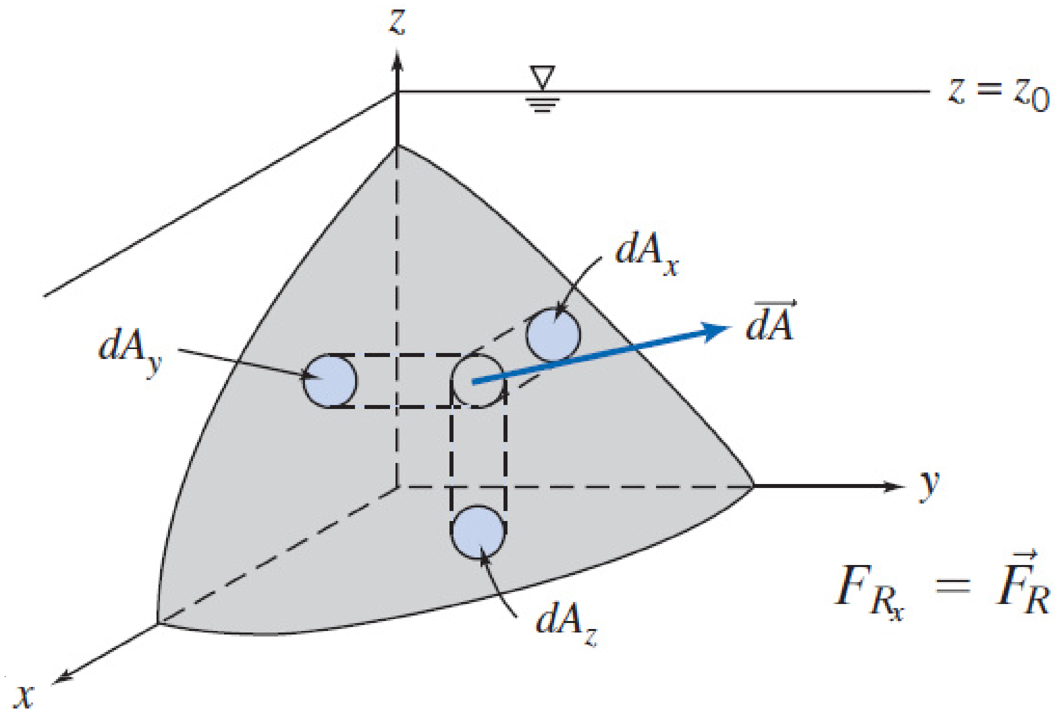


$$F_H = F_2$$

$$F_V = F_1 + \mathcal{W}$$



$$F_R = \sqrt{(F_H)^2 + (F_V)^2}$$

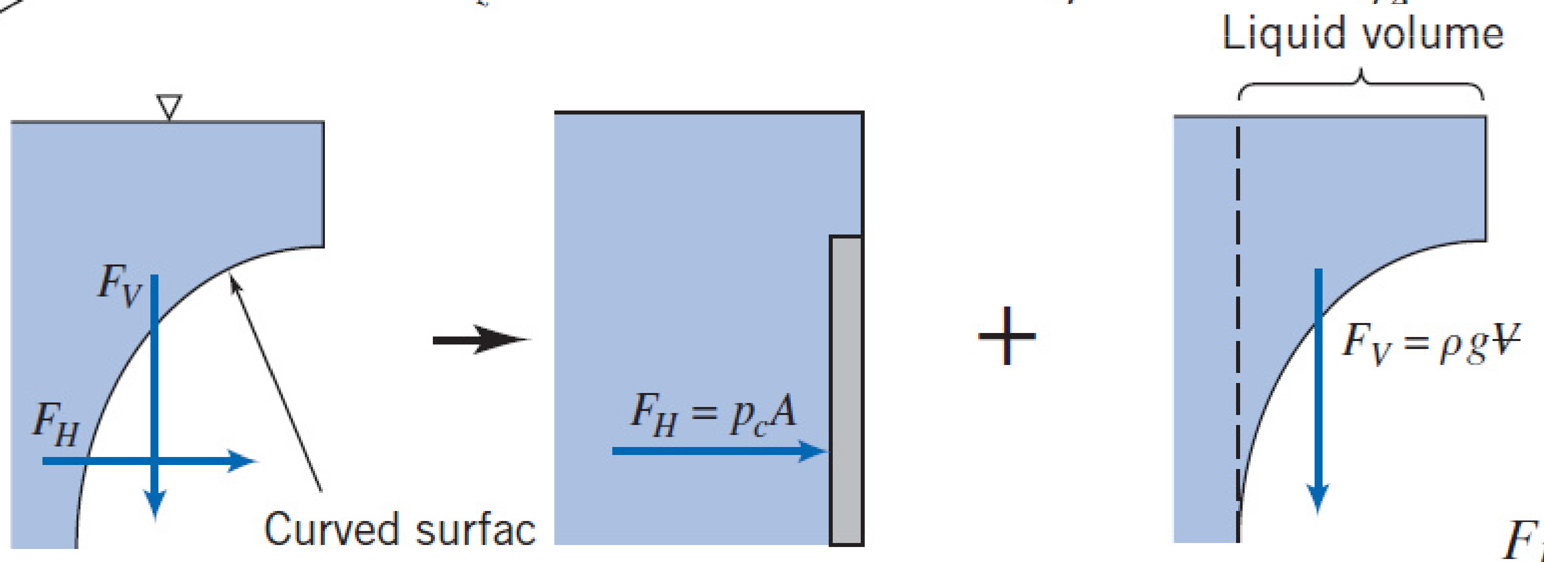


$$d\vec{F} = -p\, d\vec{A}$$

$$\vec{F}_R = -\int_A p\, d\vec{A}$$

$$\vec{F}_R = \hat{i}F_{R_x} + \hat{j}F_{R_y} + \hat{k}F_{R_z}$$

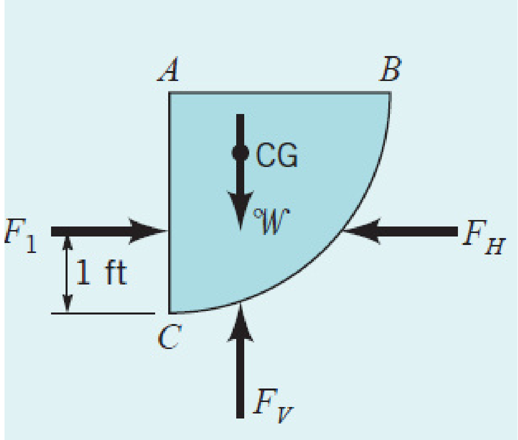
$$F_{R_x} = \vec{F}_R \cdot \hat{i} = \int d\vec{F} \cdot \hat{i} = -\int_A p\, d\vec{A} \cdot \hat{i} = -\int_{A_x} p\, dA_x$$



$$F_{R_l} = \int_{A_l} p\, dA_l$$

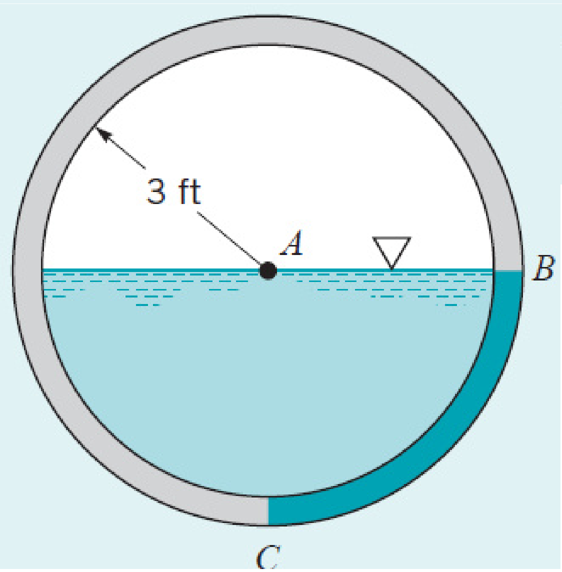
مقدار نیرو در هر راستا

مثال: یک لوله تخلیه به قطر ۶ فوت که نیمی از آن دارای آب می باشد در شکل مقابل نشان داده شده است. مقدار نیرو و راستای آن را بر روی دریچه BC به عمق ا فوتی بدست آورید. (مطابق شکل)



$$F_H = F_1 = 281 \text{ lb}$$

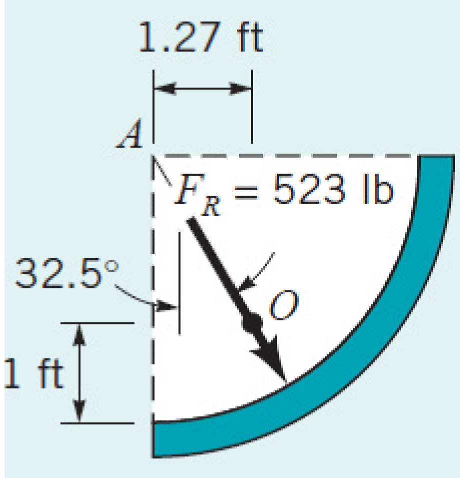
$$F_V = \mathcal{W} = 441 \text{ lb}$$



$$F_1 = \gamma h_c A = (62.4 \text{ lb/ft}^3)(\tfrac{3}{2} \text{ ft})(3 \text{ ft}^2) = 281 \text{ lb}$$

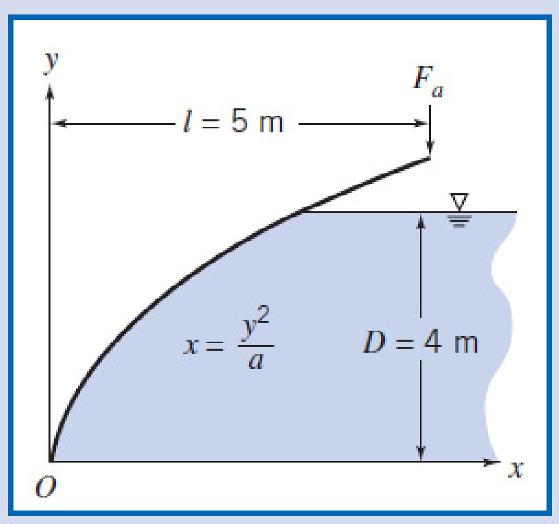
$$\mathcal{W} = \gamma \forall = (62.4 \text{ lb/ft}^3)(9\pi/4 \text{ ft}^2)(1 \text{ ft}) = 441 \text{ lb}$$

$$F_R = \sqrt{(F_H)^2 + (F_V)^2}$$
$$= \sqrt{(281 \text{ lb})^2 + (441 \text{ lb})^2} = 523 \text{ lb}$$

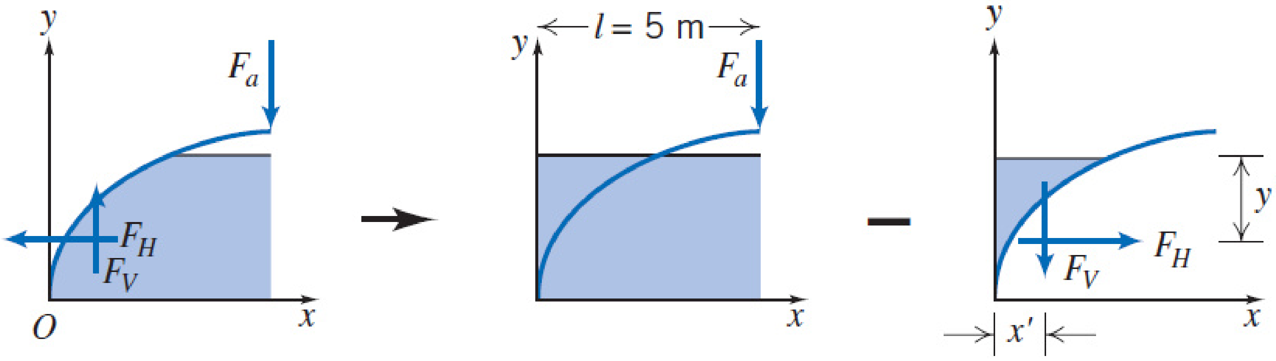


By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: نیروی وارد بر دریچه (F_a) را طوری بیابید که دریچه در جای خودش ثابت بماند.
از وزن دریچه صرفنظر گردد. پهنای دریچه ۵ متر و ثابت a برابر ۴ متراست.



free body diagram (FBD)



(a) System FBD (b) Null fluid forces (c) Fluid forces

Governing equations: $F_H = pcA$ $\quad y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{Ay_c}$ $\quad F_V = \rho g \forall$ $\quad x' = \text{water center of gravity}$

For F_H:

$$y_c = h_c = D/2$$

$$A = Dw$$

$$I_{\hat{x}\hat{x}} = wD^3/12$$

$$F_H = p_c A = \rho g h_c A = \rho g \frac{D}{2} D w = \rho g \frac{D^2}{2} w$$

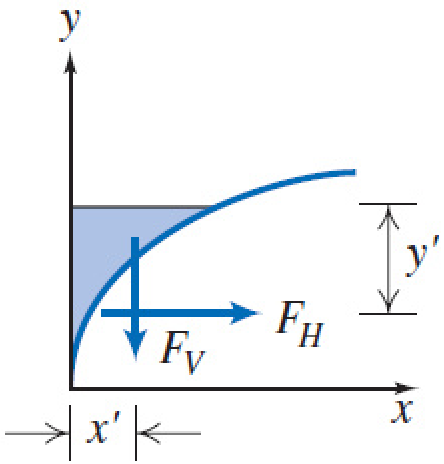
$$F_H = 392\ \text{kN}$$

$$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{Ay_c} = 2.67\ \text{m}$$

$$F_V = \rho g \forall = \rho g \int_0^{D^2/a} (D - y) w\, dx = \rho g w \int_0^{D^2/a} (D - \sqrt{a} x^{1/2}) dx = \frac{\rho g w D^3}{3a}$$

$$= 261\ \text{kN}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



$$x'F_V = \rho g \int_0^{D^{2/a}} x(D-y)w\,dx = \rho g w \int_0^{D^{2/a}} (D - \sqrt{a}x^{3/2})dx$$

$$x'F_V = \rho g w \left[\frac{D}{2}x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{a}x^{5/2}\right]_0^{D^{2/a}} = \rho g w \left[\frac{D^5}{2a^2} - \frac{2}{5}\sqrt{a}\frac{D^5}{a^{5/2}}\right] = \frac{\rho g w D^5}{10a^2}$$

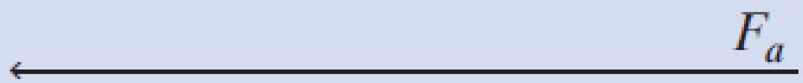
$$x' = \frac{\rho g w D^5}{10a^2 F_V} = \frac{3D^2}{10a} = \frac{3}{10} \times \frac{(4)^2\ \mathrm{m}^2}{4\ \mathrm{m}} = 1.2\ \mathrm{m}$$

$$\sum M_O = -lF_a + x'F_V + (D-y')F_H = 0$$

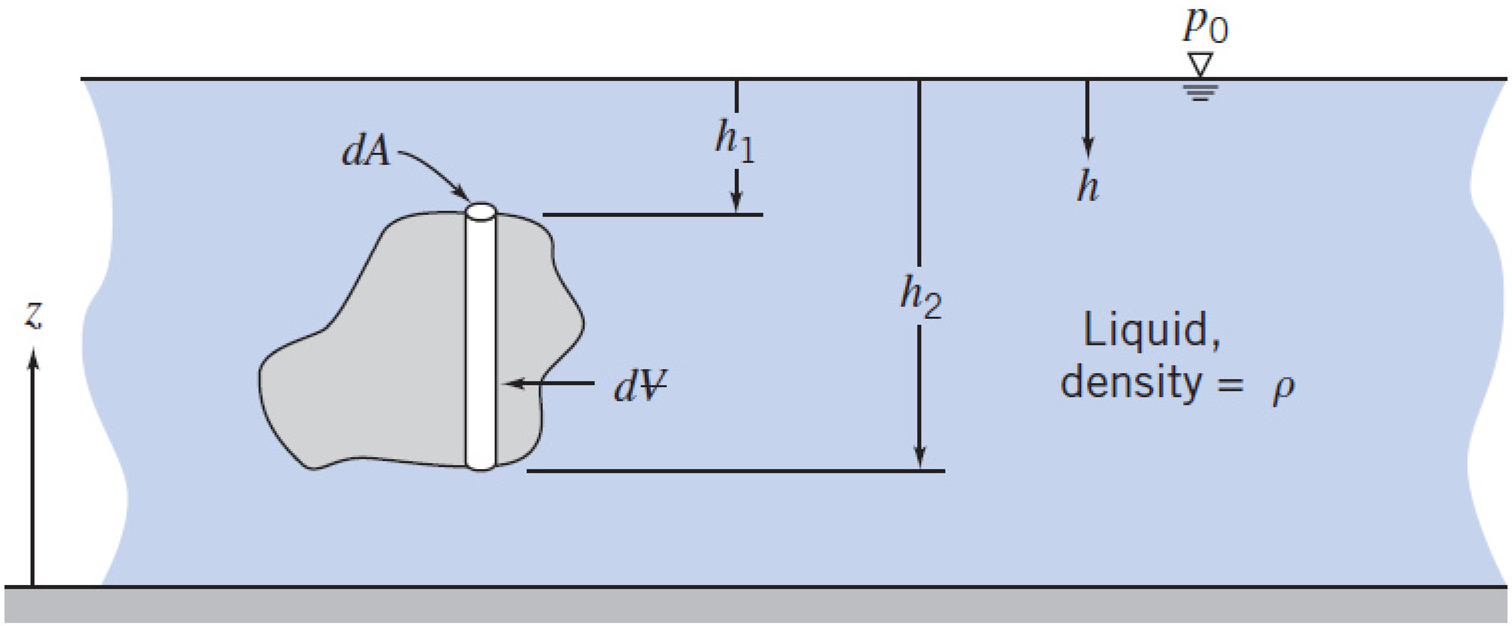
$$F_a = \frac{1}{l}[x'F_V + (D-y')F_H]$$

$$= \frac{1}{5\ \mathrm{m}}[1.2\ \mathrm{m} \times 261\ \mathrm{kN} + (4-2.67)\ \mathrm{m} \times 392\ \mathrm{kN}]$$

$$F_a = 167\ \mathrm{kN}$$



شناوری و پایداری



$$p = p_0 + \rho g h$$

$$dF_z = (p_0 + \rho g h_2)\, dA - (p_0 + \rho g h_1)\, dA = \rho g (h_2 - h_1)\, dA$$

$$(h_2 - h_1) dA = d\forall \;\Longrightarrow\; F_z = \int dF_z = \int_{\forall} \rho g\, d\forall = \rho g \forall$$

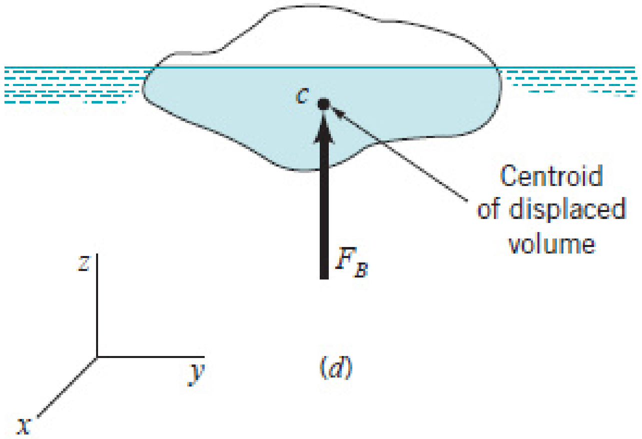
نیروی شناوری برابر با وزن حجم سیال جابجا شده است. در نتیجه، حجم جسم در وزن مخصوص سیال برابر با نیروی شناوری می باشد.

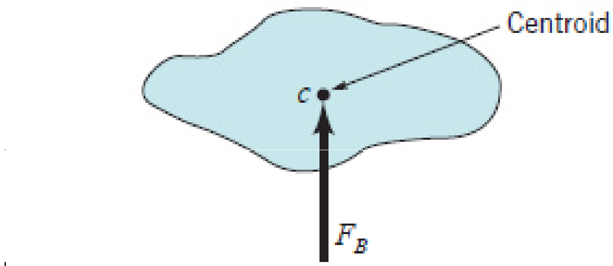
$$F_{\text{buoyancy}} = \rho g \forall$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

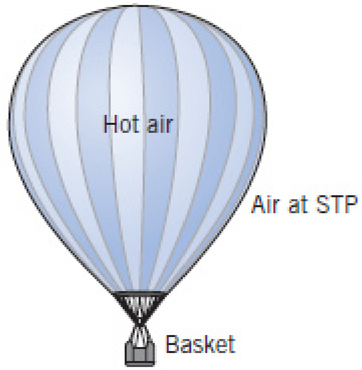
محل اثر این نیرو در مرکز حجم سیال جابجا شده می باشد.

نمایش فیلم ۵-۲ و ۶ -۲





مثال: یک بالن که به شکل تقریبی یک کره است، با هوای گرم پر شده و جسمی به وزن ۶۰۰ پوند را بلند می نماید. دمای هوای گرم داخل بالن را محاسبه نمایید.



$$F_{\text{buoyancy}} = \rho g \mathcal{V} \qquad \sum F_y = 0 \qquad p = \rho R T$$

$$\sum F_y = F_{\text{buoyancy}} - W_{\text{hot air}} - W_{\text{load}} = \rho_{\text{atm}} g \mathcal{V} - \rho_{\text{hot air}}\, g \mathcal{V} - W_{\text{load}} = 0$$

$$\rho_{\text{hot air}} = \rho_{\text{atm}} - \frac{W_{\text{load}}}{g \mathcal{V}} = \rho_{\text{atm}} - \frac{6 W_{\text{load}}}{\pi d^3 g}$$

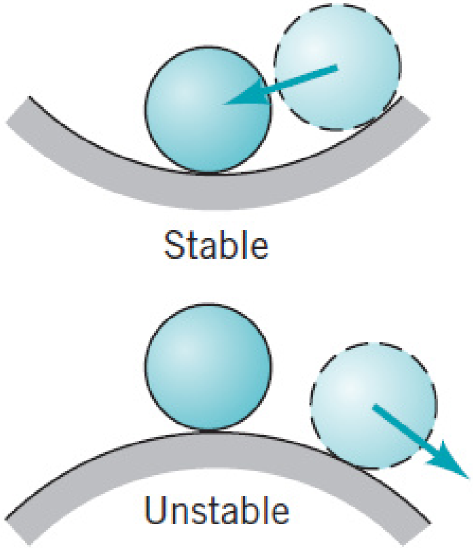
$$\rho_{\text{hot air}} = (0.00238 - 0.000285)\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} = 0.00209 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$$

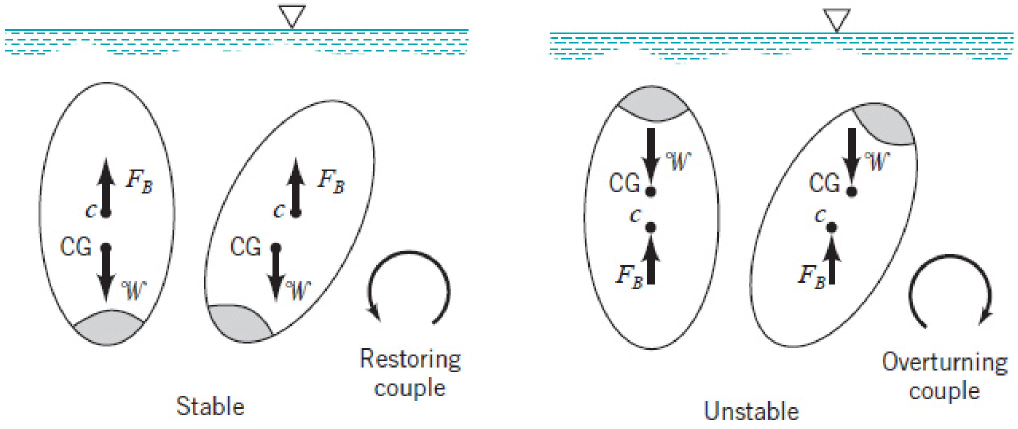
$$\frac{p_{\text{hot air}}}{\rho_{\text{hot air}} R T_{\text{hot air}}} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}} R T_{\text{atm}}}$$

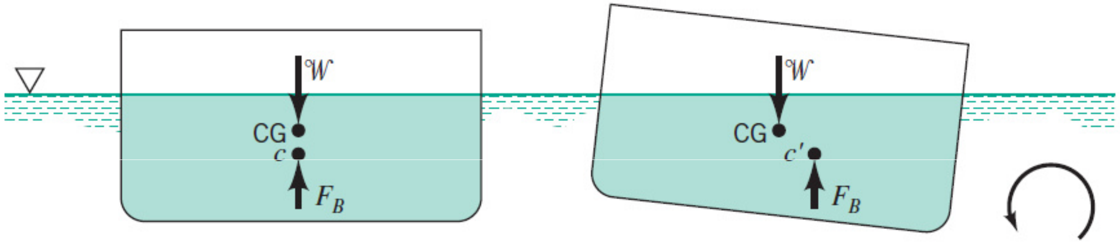
$$T_{\text{hot air}} = T_{\text{atm}} \frac{\rho_{\text{atm}}}{\rho_{\text{hot air}}} = (460 + 59)^\circ\text{R} \times \frac{0.00238}{0.00209} = 591^\circ\text{R}$$

$$T_{\text{hot air}} = 131^\circ\text{F}$$

پایداری



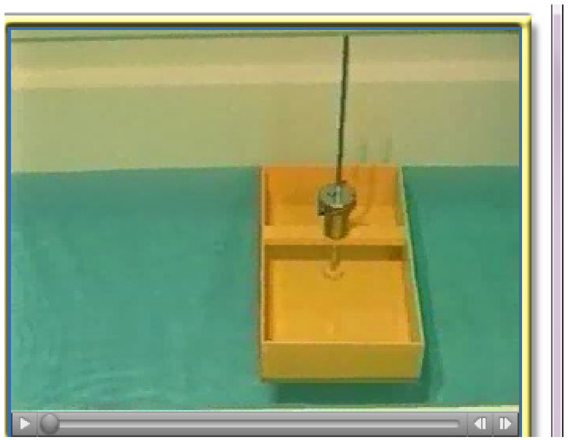


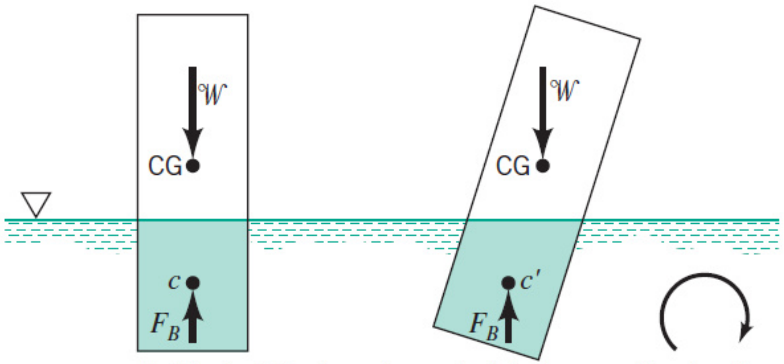


c = centroid of original displaced volume

c′ = centroid of new displaced volume

نمایش فیلم ۲-۷

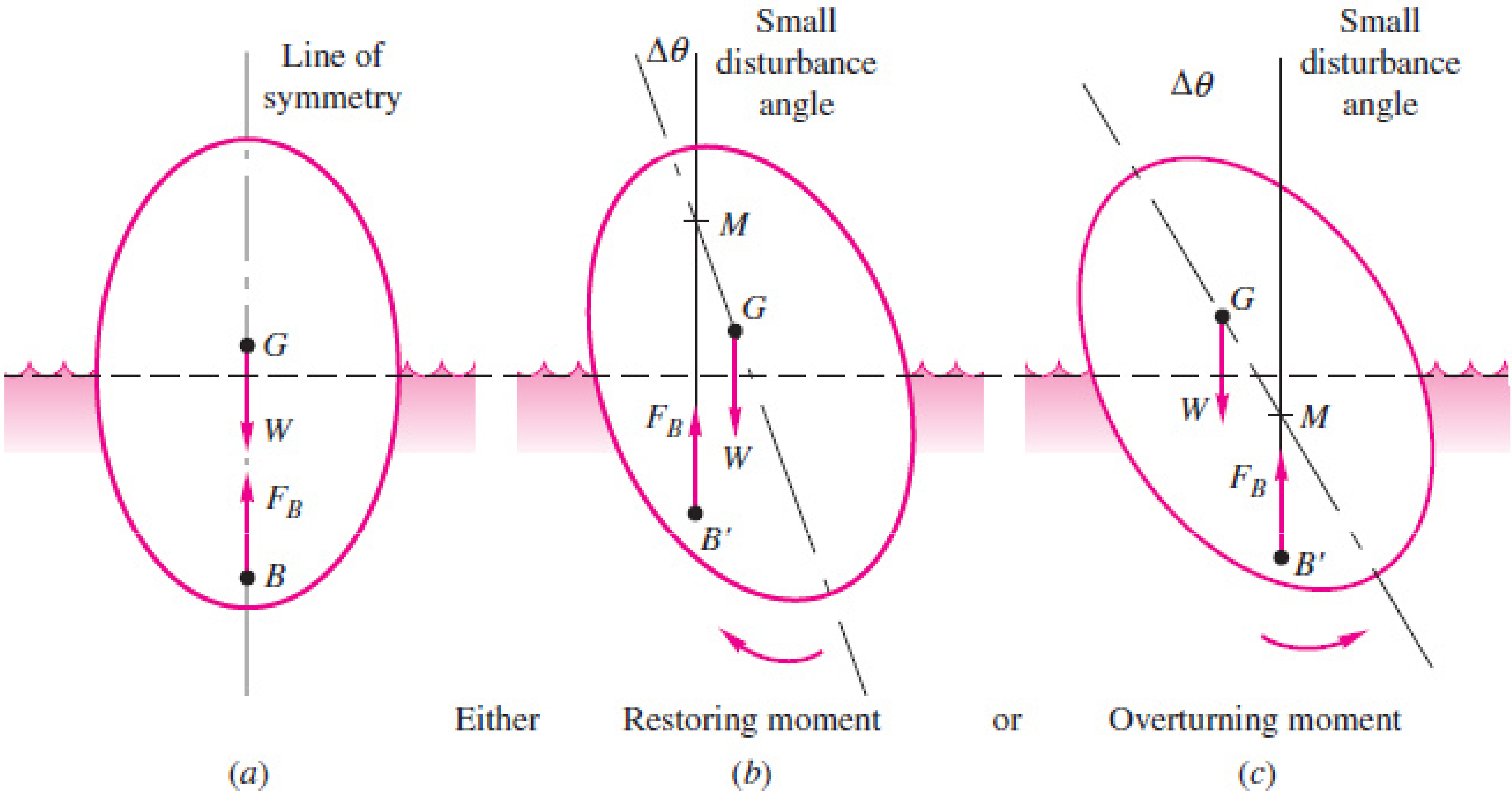




c = centroid of original displaced volume

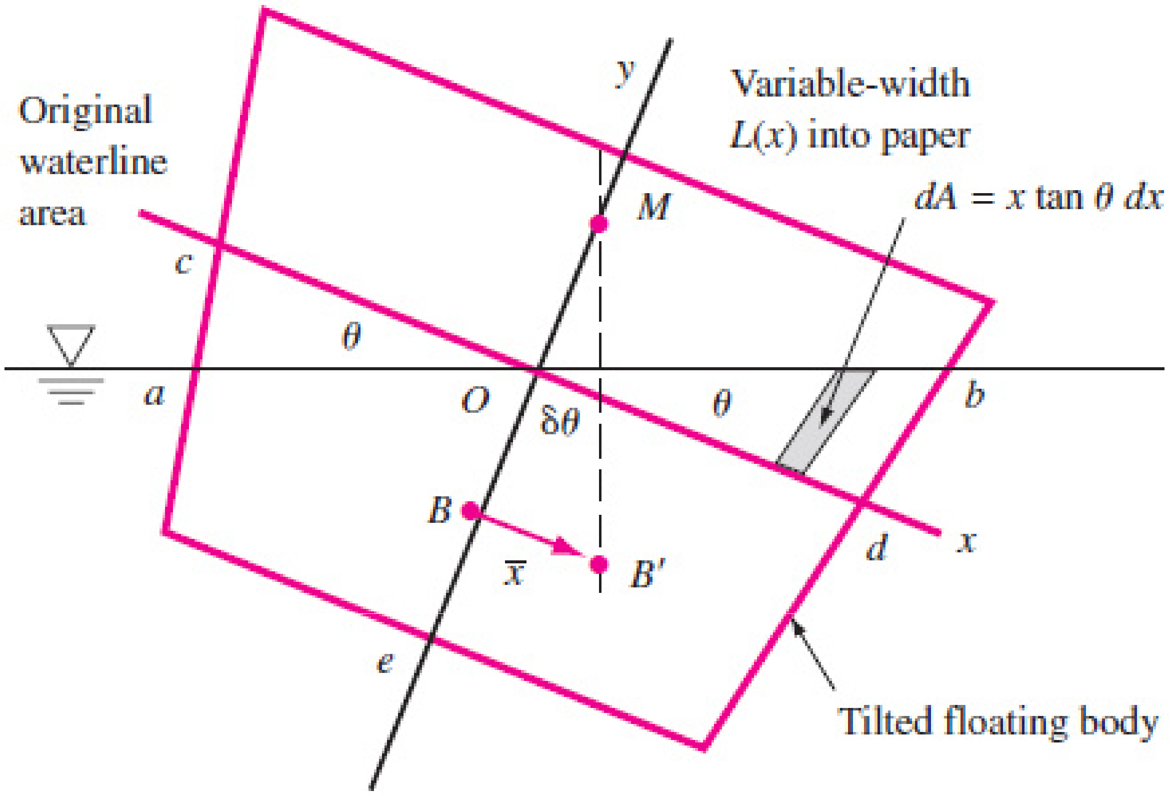
c′ = centroid of new displaced volume

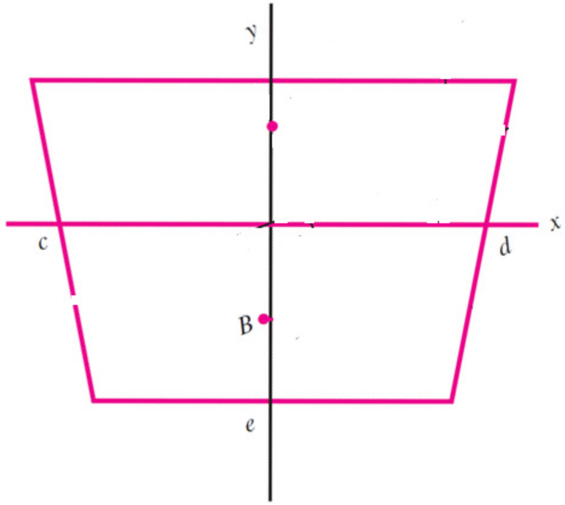
Unstable



نقطه M، نقطه فرامرکزی (metacenter) و به طول MG ارتفاع فرامرکزی (metacenter height) نامیده می شود.

Stability Related to Waterline Area



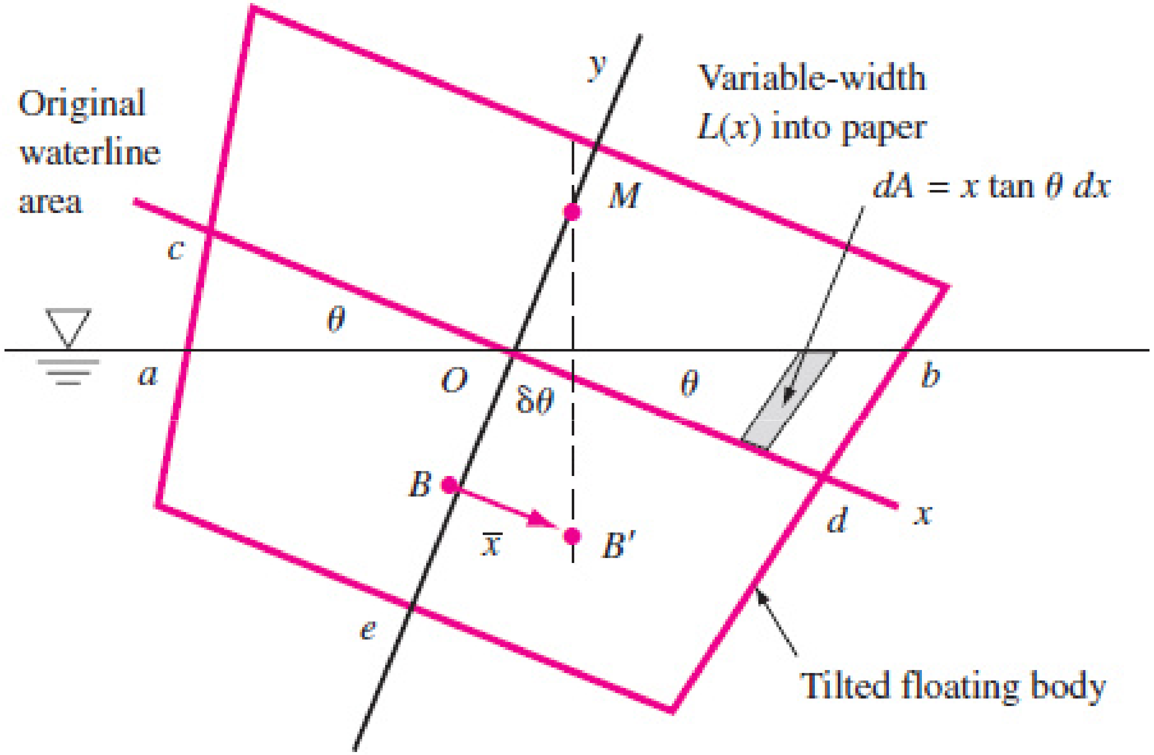


حجم

$$\overline{x}\, v_{aObde} = \int_{cOdea} x\, dv + \int_{Obd} x\, dv - \int_{cOa} x\, dv = 0 + \int_{Obd} x\,(L\, dA) - \int_{cOa} x\,(L\, dA)$$

$$= 0 + \int_{Obd} x\, L\,(x \tan\theta\, dx) - \int_{cOa} xL\,(-x\tan\theta\, dx) = \tan\theta \int_{\text{waterline}} x^2\, dA_{\text{waterline}} = I_O \tan\theta$$

$$\frac{\bar{x}}{\tan\theta} = \overline{MB} = \frac{I_O}{\upsilon_{\text{submerged}}} = \overline{MG} + \overline{GB} \quad \text{or} \quad \overline{MG} = \frac{I_O}{\upsilon_{\text{sub}}} - \overline{GB}$$



If the metacentric height MG is positive ➡ the body is stable for small disturbances

Note that if $\overline{GB}$ is negative, that is, B is *above* G, ➡ the body is always stable

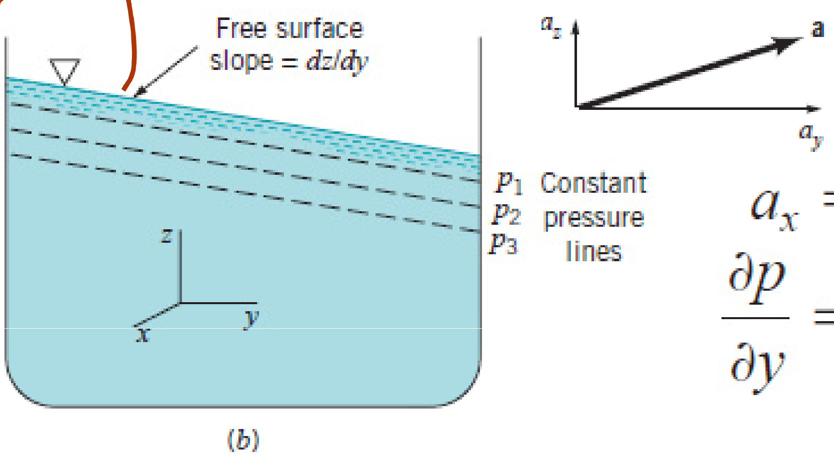
تغییرات فشار در ظرف حاوی سیال

با توجه به عدم وجود تنش برشی، لذا سیال همراه جسم صلب حرکت یا چرخش می نماید

$$-\nabla p - \gamma\hat{\mathbf{k}} = \rho\mathbf{a} \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} = \gamma + \rho a_z \end{cases}$$

حرکت مستقیم

بررسی یک ظرف در باز که دارای حرکت مستقیم با شتاب ثابت می باشد.



(b)

$$a_x = 0 \Rightarrow \partial p/\partial x = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{g + a_z}}$$

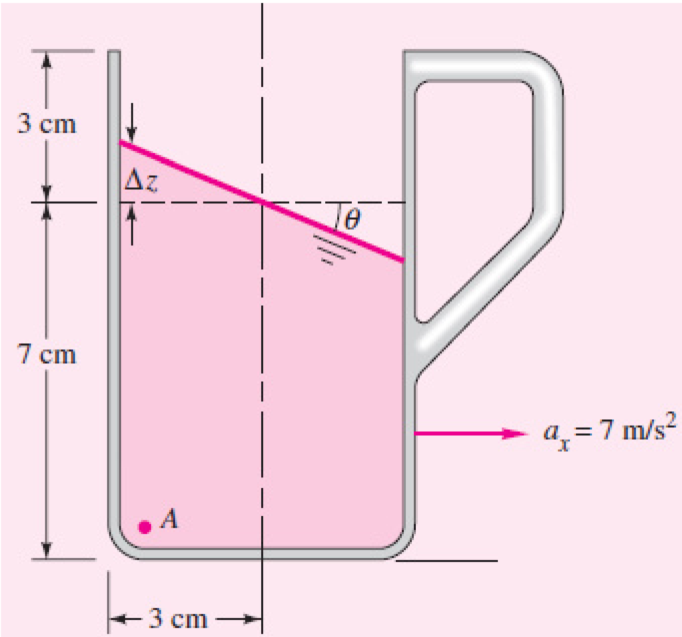
$$dp = \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \Rightarrow dp = -\rho a_y\,dy - \rho(g + a_z)\,dz$$

Along a line of *constant* pressure, $dp = 0$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g + a_z}$$

نکته: برای سیال در حال حرکت، فشار دیگر فشار هیدرواستاتیک به تنهایی نیست

If $a_y = 0,\ a_z \neq 0, \Rightarrow \dfrac{dp}{dz} = -\rho(g + a_z)$



مثال: یک لیوان چای در شرایط ساکن دارای ۷ سانتی متر از عمق لیوان(عمق لیوان ۱۰ سانتی متر) را پر می کند. در صورتی که قطر لیوان ۶ سانتی متر باشد و شخصی با شتاب ۷ $\mathrm{m/s^2}$ حرکت نماید، حداکثر چای تا کجای لیوان بالا می آید.

- فشار در نقطه A را در صورتی که دانسیته سیال ۱۰۱۰ $\mathrm{kg/m^3}$ بدست آورید

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_x}{g + \cancel{a_z}_{\to 0}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{a_x}{g} = \tan^{-1}\frac{7.0\ \mathrm{m/s^2}}{9.81\ \mathrm{m/s^2}} = 35.5°$$

$$\Delta z = (3\ \mathrm{cm})(\tan 35.5°) = 2.14\ \mathrm{cm} < 3\ \mathrm{cm}$$

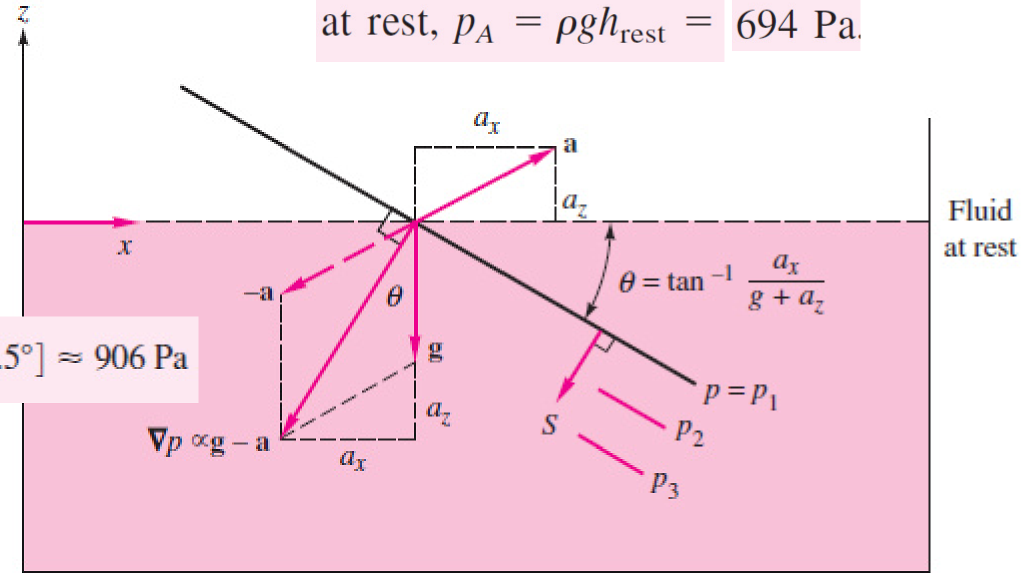
در نتیجه چای از لیوان خارج نمی شود

at rest, $p_A = \rho g h_{\text{rest}} = 694\ \mathrm{Pa}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_x}{g + a_z}$$

$$\frac{dp}{ds} = \rho G \qquad \text{where } G = [a_x^2 + (g + a_z)^2]^{1/2}$$

$$p_A = \rho G\,\Delta s = \left(1010\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)\left[\sqrt{(9.81)^2 + (7.0)^2}\right][(0.07 + 0.0214)\cos 35.5°] \approx 906\ \mathrm{Pa}$$

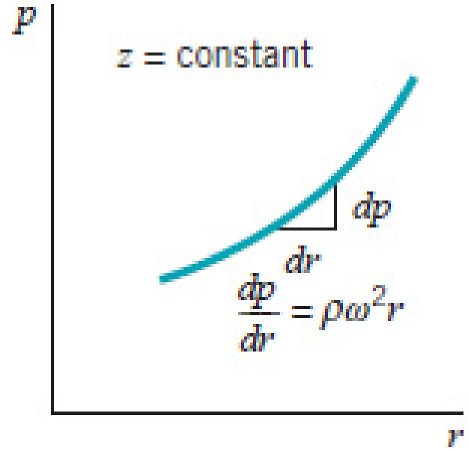


By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

Rigid-Body Rotation

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z \quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= -r\omega^2\,\hat{\mathbf{e}}_r \\ \mathbf{a}_\theta &= 0 \\ \mathbf{a}_z &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \rho r\omega^2 \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$$

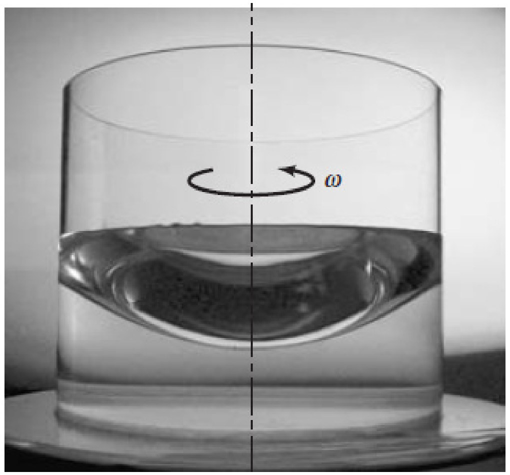


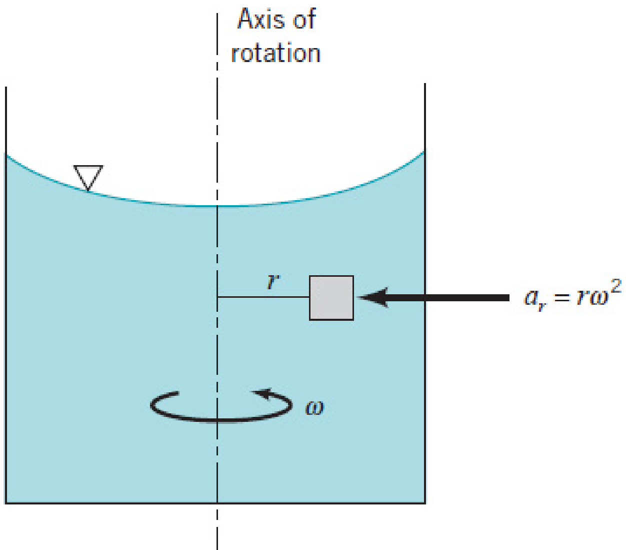
$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz \Rightarrow dp = \rho r\omega^2\,dr - \gamma\,dz$$

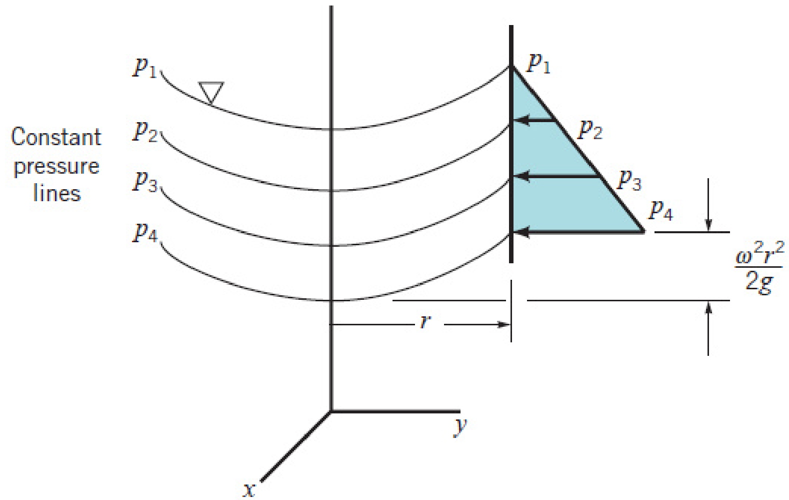
Along a surface of constant pressure, such as the free surface, $dp = 0$,

$\gamma = \rho g$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g} \Rightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{constant}$$



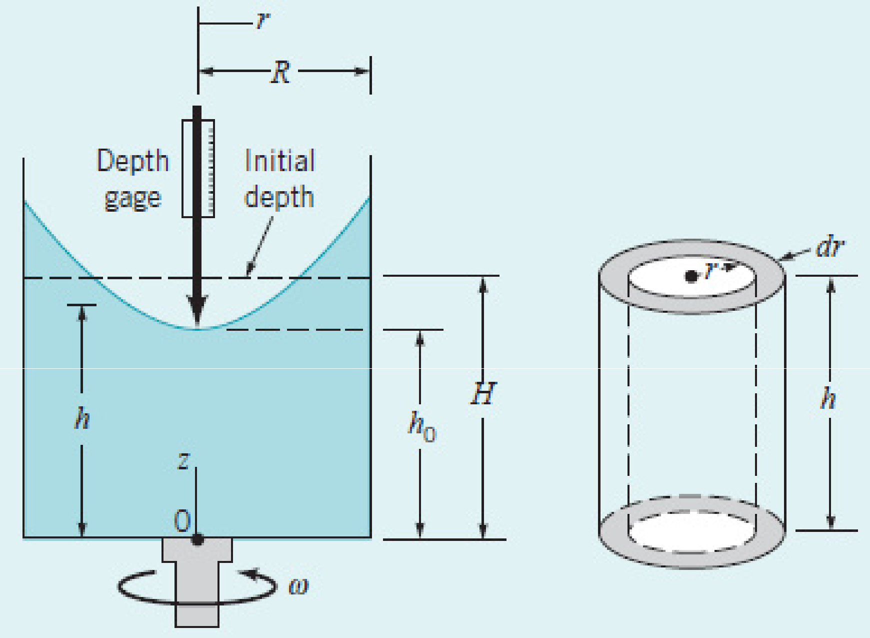




By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

$$dp = \rho r\omega^2\, dr - \gamma\, dz \longrightarrow \int dp = \rho\omega^2 \int r\, dr - \gamma \int dz \longrightarrow p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \gamma z + \text{constant}$$

مثال: برای کاهش ارتفاع سیال در حال چرخش و سرعت زاویه ای رابطه ای بدست آورید.



$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{constant} \longrightarrow h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0$$

The initial volume of fluid in the tank, $\forall_i$, $\forall_i = \pi R^2 H$

$$d\forall = 2\pi r h\, dr$$

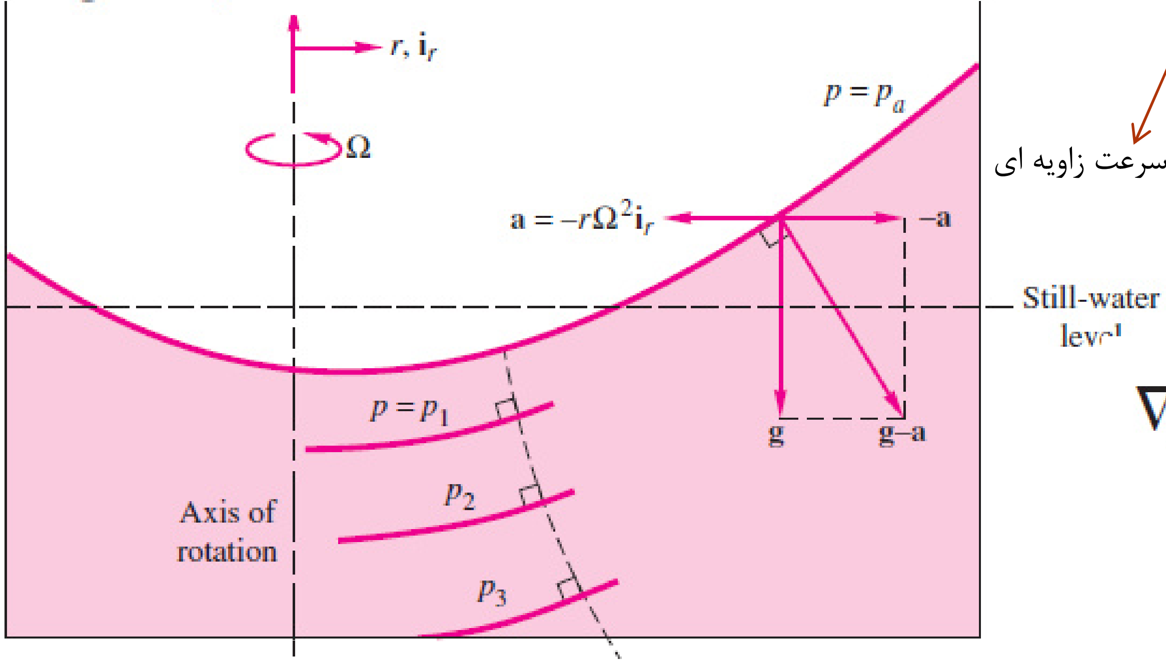
$$\forall = 2\pi \int_0^R r\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0\right) dr = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \pi R^2 h_0$$

Since the volume of the fluid in the tank must remain constant

$$\forall_i = \pi R^2 H = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \pi R^2 h_0 \longrightarrow H - h_0 = \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

Rigid-Body Rotation



$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{k}\Omega \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{i}_r r$$

بردار سرعت زاویه ای

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0) = -r\Omega^2\mathbf{i}_r$$

شتاب

$$\nabla p = \mathbf{i}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z} = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a})$$

$$= \rho(-g\mathbf{k} + r\Omega^2\mathbf{i}_r)$$

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \Omega^2} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$$

انتگرال گیری

$$p = \tfrac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 + f(z)$$

مشتق نسبت به z

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 + f'(z) = -\gamma \Rightarrow f(z) = -\gamma z + C$$

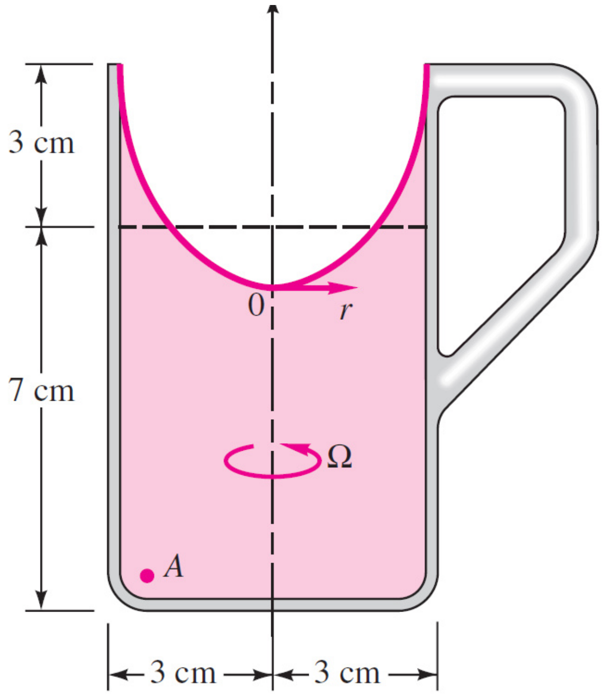
$$p = \text{const} - \gamma z + \tfrac{1}{2}\rho r^2\Omega^2$$

If $p = p_0$ at $(r, z) = (0, 0)$ $\Rightarrow$ $C = p_0$

$$\boxed{p = p_0 - \gamma z + \tfrac{1}{2}\rho r^2\Omega^2}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

همان مثال لیوان برای حالتی که دارای سرعت زاویه ای باشد که سیال تا لبه لیوان بالا بیاید.
-فشار گیج در این حالت در نقطه A چند است؟



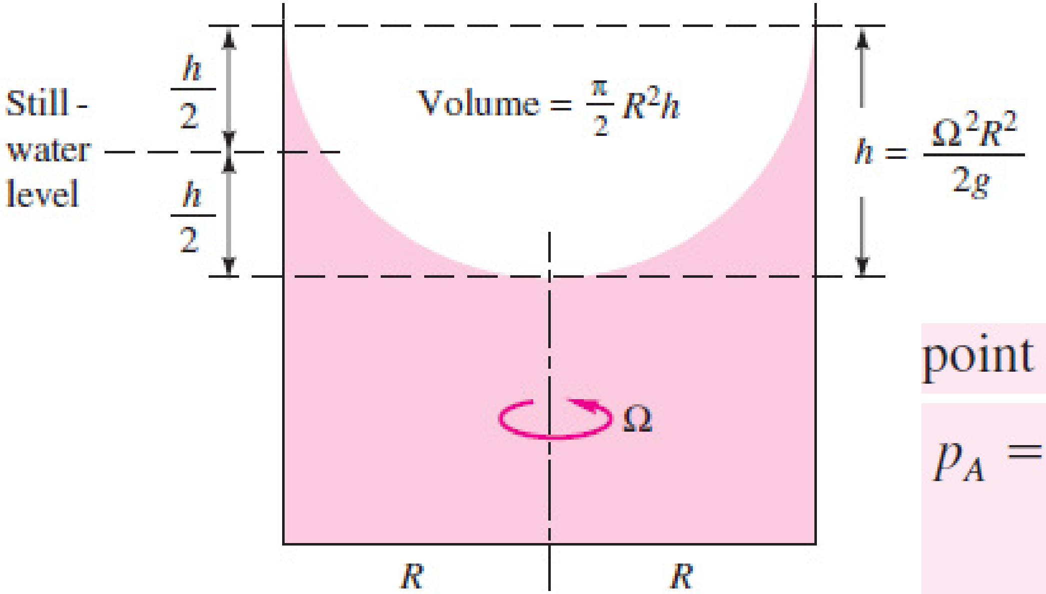
$$z = \frac{p_0 - p_1}{\gamma} + \frac{r^2\Omega^2}{2g}$$

در شرایطی که سیال به لبه بالا برسد $p=p_0$

$$\Rightarrow z = \frac{r^2\Omega^2}{2g} \Rightarrow$$

برای یک ظرف با مقطع دایره، شکل بوجود آمده سهمی بوده که حجم آن متناسب با نصف ارتفاع در سطح مقطع می باشد

$$h/2 = \Omega^2R^2/(4g)$$



$$\frac{h}{2} = 0.03 \text{ m} = \frac{\Omega^2R^2}{4g} = \frac{\Omega^2(0.03 \text{ m})^2}{4(9.81 \text{ m/s}^2)}$$

$$\Omega^2 = 1308 \Rightarrow \Omega = 36.2 \text{ rad/s} = 345 \text{ r/min}$$

$$p = p_0 - \gamma z + \tfrac{1}{2}\rho r^2\Omega^2$$

point A is at $(r, z) = (3 \text{ cm}, -4 \text{ cm})$

$$\begin{aligned} p_A &= 0 - (1010 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(-0.04 \text{ m}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(1010 \text{ kg/m}^3)(0.03 \text{ m})^2(1308 \text{ rad}^2/\text{s}^2) \\ &= 396 \text{ N/m}^2 + 594 \text{ N/m}^2 = 990 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Useful Equations

Hydrostatic pressure variation:	$\frac{dp}{dz} = -\rho g \equiv -\gamma$
Hydrostatic pressure variation (incompressible fluid):	$p - p_0 = \Delta p = \rho g h$
Hydrostatic pressure variation (several incompressible fluids):	$\Delta p = g \sum_i \rho_i h_i$
Hydrostatic force on submerged plane (integral form):	$F_R = \int_A p\, dA$
Hydrostatic force on submerged plane:	$F_R = p_c A$
Location y' of hydrostatic force on submerged plane (integral):	$y' F_R = \int_A yp\, dA$
Location y' of hydrostatic force on submerged plane (algebraic):	$y' = y_c + \frac{\rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}}}{F_R}$
Location y' of hydrostatic force on submerged plane (p_0 neglected):	$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{A y_c}$
Location x' of hydrostatic force on submerged plane (integral):	$x' F_R = \int_A x\, p\, dA$
Location x' of hydrostatic force on submerged plane (algebraic):	$x' = x_c + \frac{\rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{y}}}{F_R}$
Location x' of hydrostatic force on submerged plane (p_0 neglected):	$x' = x_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{A\, y_c}$
Horizontal and vertical hydrostatic forces on curved submerged surface:	$F_H = p_c A$ and $F_V = \rho g \forall$
Buoyancy force on submerged object:	$F_{\text{buoyancy}} = \rho g \forall$

By: M. Farhadi,
Faculty of Mechanical Eng., Babol University of Technology