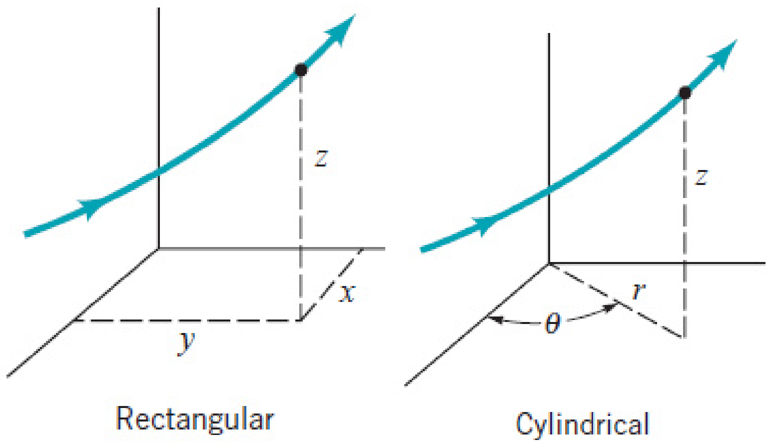
مبانی دینامیک سیالات- معادله برنولی

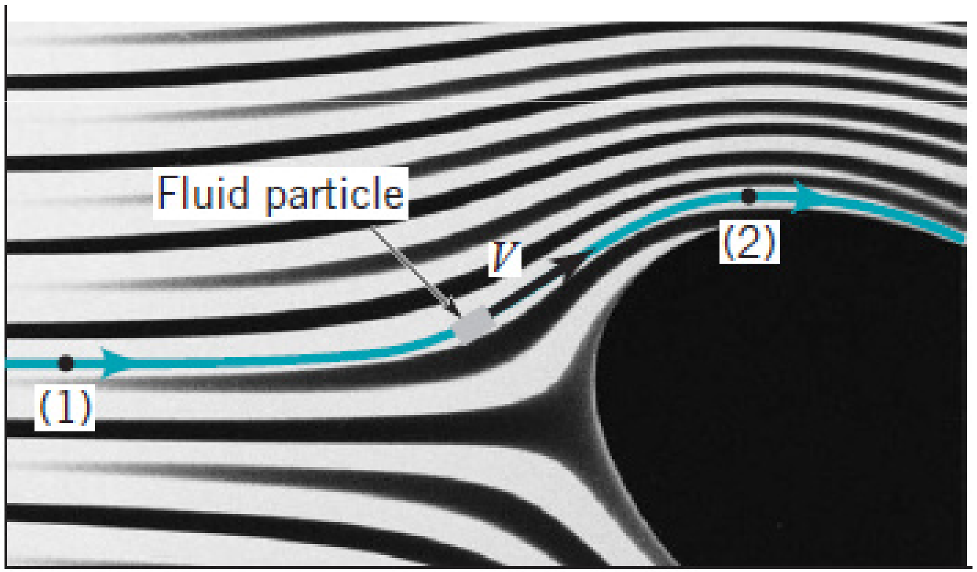
Newton's second law of motion, $\Rightarrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$



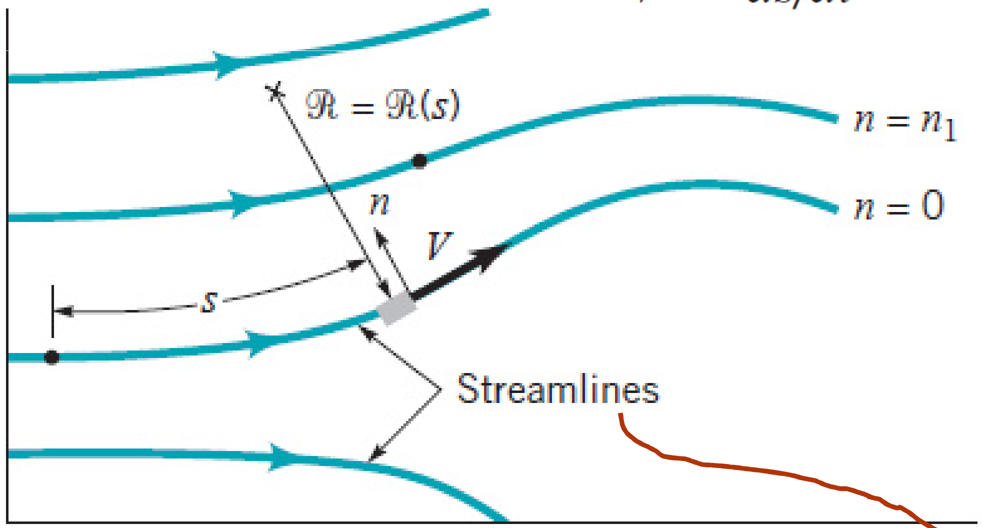
با فرض سیال غیر لزج (Inviscid)، تنها عوامل ایجاد حرکت، فشار و شتاب جاذبه می باشند.

جرم ذره در شتاب آن= اثر نیروی جاذبه + برآیند فشار وارده بر ذره سیال

برای حالت دایم



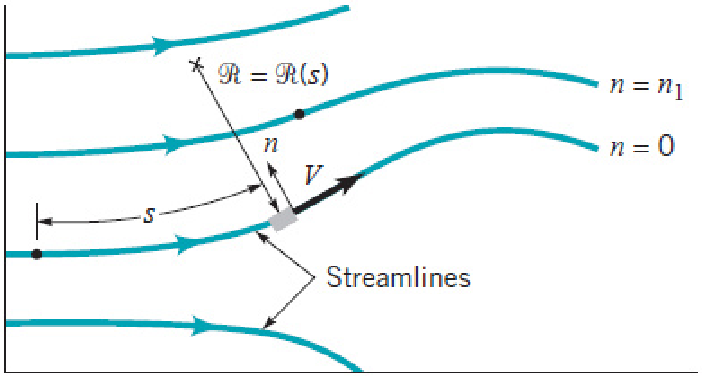
$$V = ds/dt$$



خط جریان به خطی گفته می شود که بردار سرعت ذره در هر نقطه بر این خط مماس می باشد

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

قانون دوم نیوتن برای یک ذره بر روی خط جریان



$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(s)$$
$$s = s(t)$$

particle's speed $=$ $V = ds/dt$

$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt$ the acceleration has two components
- one along the streamline, a_s;
- normal to the streamline, a_n

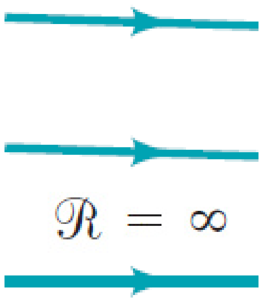
$$a_n = V^2/\mathcal{R}$$

Steady

$$V = V(s) \rightarrow a_s = dV/dt = (\partial V/\partial s)(ds/dt), \quad V = ds/dt \quad \Rightarrow (\partial V/\partial s)V$$

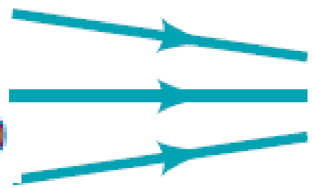
Unsteady

$$V = V(s,t) \Rightarrow \alpha_s = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}$$



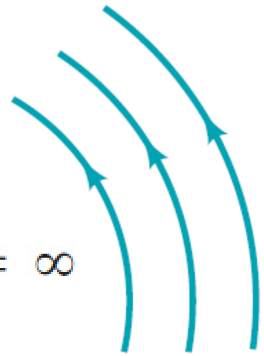
$\mathcal{R} = \infty$

$a_s = a_n = 0$



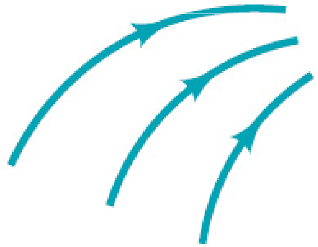
$a_n = 0$

$\mathcal{R} = \infty$ $a_s > 0$



$\mathcal{R} \neq \infty$

$a_n > 0$

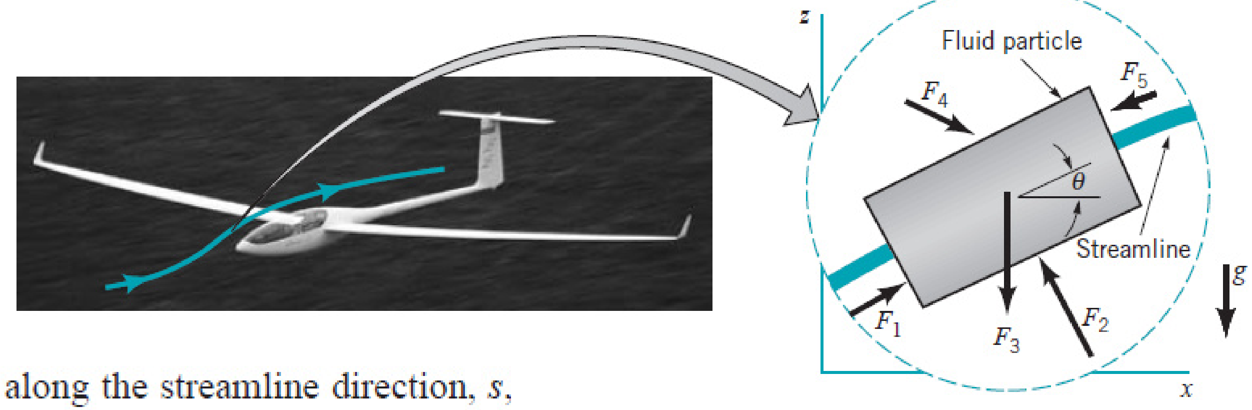


$a_s > 0$, $a_n > 0$

$\mathcal{R} \neq \infty$

برای سیال تراکم ناپذیر، سرعت رابطه عکس با فاصله بین خطوط جریان دارد

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



نیروی های وارده بر المان سیال شامل نیروی عکس العمل وارده از محیط بر روی ذره سیال (نیروی حاصل از فشار، تنش های برشی ونرمال) و نیروی وزن ذره

viscous forces and surface tension effects, are assumed negligible.

$\boxed{\text{since the fluid is inviscid.}}$

along the streamline direction, s,

$$\sum \delta F_s = \delta m\, a_s = \delta m\, V\frac{\partial V}{\partial s} = \rho\, \delta \mathcal{V}\, V\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\delta \mathcal{V} = \delta s\, \delta n\, \delta y$$

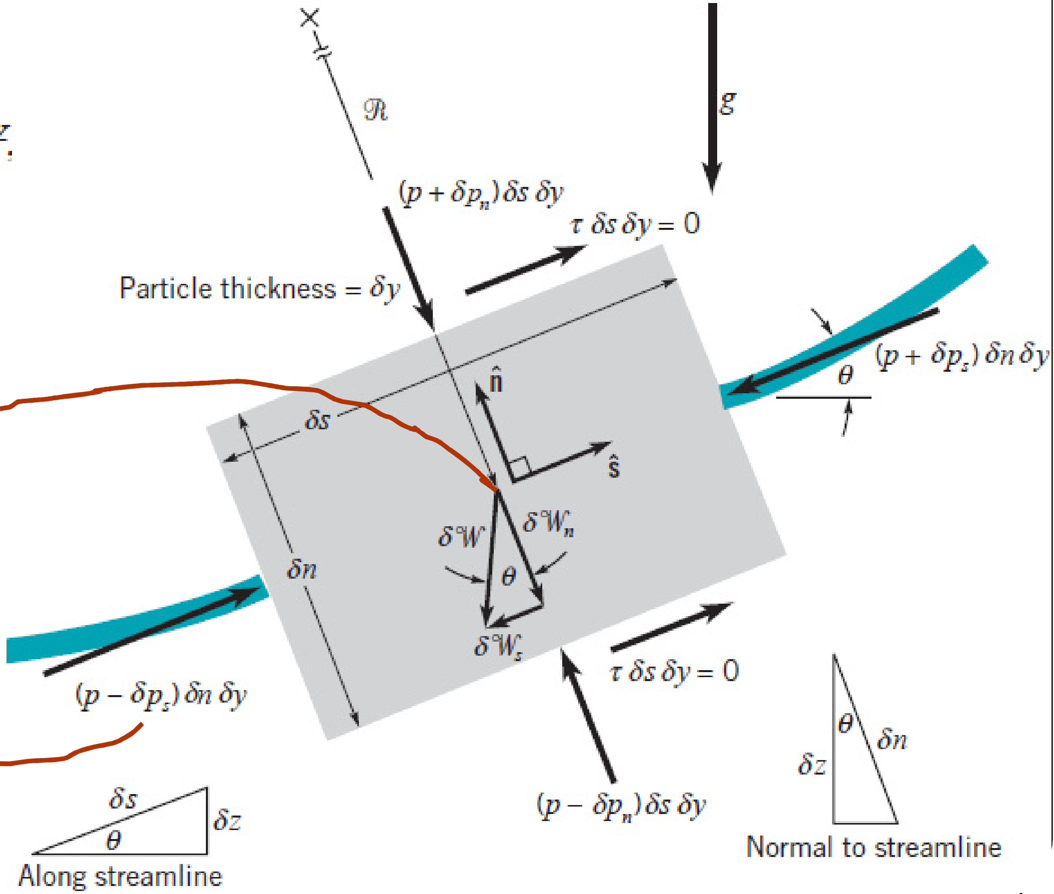
The gravity force (weight) on the particle $\delta \mathcal{W} = \gamma\, \delta \mathcal{V}$,

the component of the weight force in the direction of the streamline is

$$\delta \mathcal{W}_s = -\delta \mathcal{W} \sin\theta = -\gamma\, \delta \mathcal{V} \sin\theta$$

for steady flow, $p = p(s, n)$

$$\delta p_s \approx \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\delta s}{2}$$



By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

δF_{ps} is the net pressure force on the particle in the streamline direction.

$$\delta F_{ps} = (p - \delta p_s)\,\delta n\,\delta y - (p + \delta p_s)\,\delta n\,\delta y = -2\,\delta p_s\,\delta n\,\delta y = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta s\,\delta n\,\delta y = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta \forall$$

$$\nabla p = \partial p/\partial s\,\hat{\mathbf{s}} + \partial p/\partial n\,\hat{\mathbf{n}}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum \delta F_s &= \delta \mathcal{W}_s + \delta F_{ps} = \left(-\gamma \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}\right)\delta \forall \\ \sum \delta F_s &= \delta m\, a_s = \delta m\, V\frac{\partial V}{\partial s} = \rho\,\delta\forall\, V\frac{\partial V}{\partial s} \end{aligned}\right\} \quad -\gamma \underbrace{\sin\theta}_{\sin\theta = dz/ds} - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho \underbrace{V\frac{\partial V}{\partial s}}_{V\,dV/ds = \frac{1}{2}d(V^2)/ds} = \rho a_s$$

along the streamline the value of n is constant $(dn = 0)$ $\Rightarrow$ $dp = (\partial p/\partial s)\,ds + (\partial p/\partial n)\,dn = (\partial p/\partial s)\,ds$

در راستای خط جریان

$$\partial p/\partial s = dp/ds$$

$$-\gamma\frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2}\rho\frac{d(V^2)}{ds} \Longrightarrow dp + \frac{1}{2}\rho d(V^2) + \gamma\,dz = 0 \qquad \text{(along a streamline)}$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = C \qquad \text{(along a streamline)}$$

for steady, inviscid, incompressible flow.

$$\boxed{p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \text{constant along streamline}}$$

Bernoulli equation

نکته: فقط در راستای خط جریان برقرار است

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

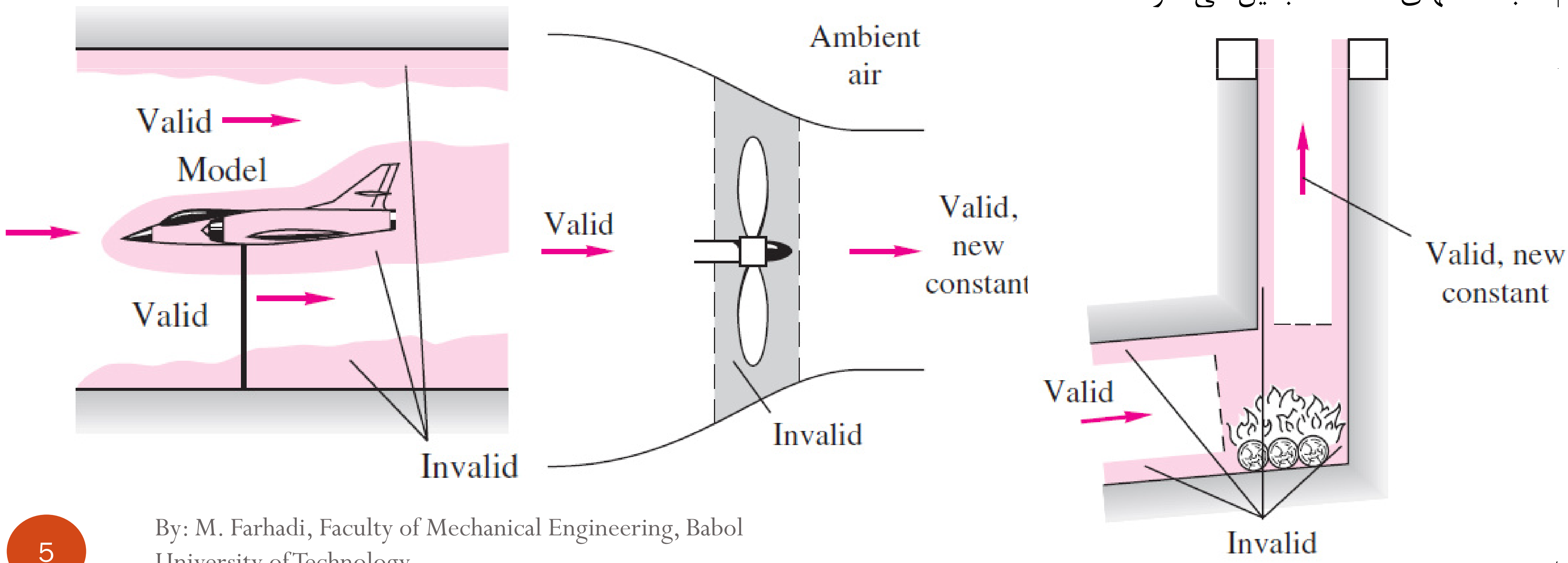
$$\boxed{p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \text{constant along streamline}}$$

along a single streamline

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0}$$

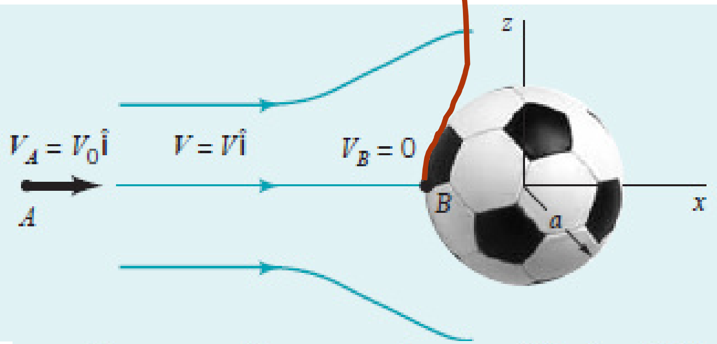
نکته: با تغییر خط جریان، مقدار ثابت در رابطه برنولی تغییر می نماید. لذا برای دو نقطه بر روی یک خط جریان می توان رابطه بالا را استفاده نمود.

رابطه برنولی بیانگر ارتباط بین انرژی است. ارتباط میان کار بازگشت پذیر ناشی از فشار، تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل است. این مطلب بیانگر این واقعیت است که در صورت عدم وجود تلفات حرارتی ناشی از لزجت و کار نیروی محوری، مقدار انرژی ثابت بوده و تنها به شکلهای مختلف تبدیل می شود.



مثال: برای یک سیال غیر لزج و تراکم ناپذیر، توزیع سرعت در راستای خط جریان افقی AB در شرایط دایم برابر است با: $V = V_0\left(1+\dfrac{a^3}{x^3}\right)$ تغییرات فشار در این فاصله را بدست آورید.

Stagnation point



$$-\gamma \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} = \rho a_s \quad (1)$$

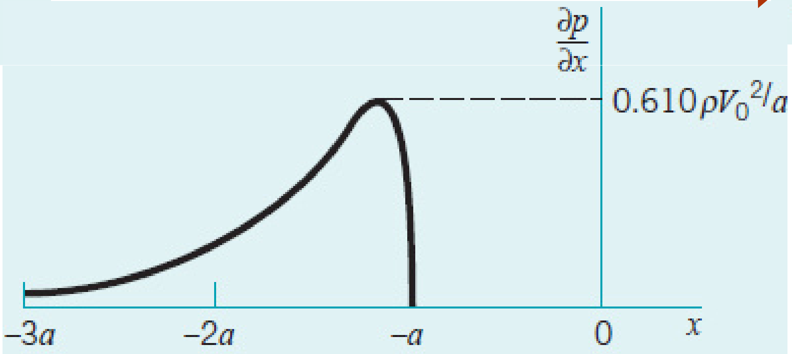
the streamline is horizontal, $\sin\theta = \sin 0^\circ = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial p}{\partial s} = -\rho V \dfrac{\partial V}{\partial s}$

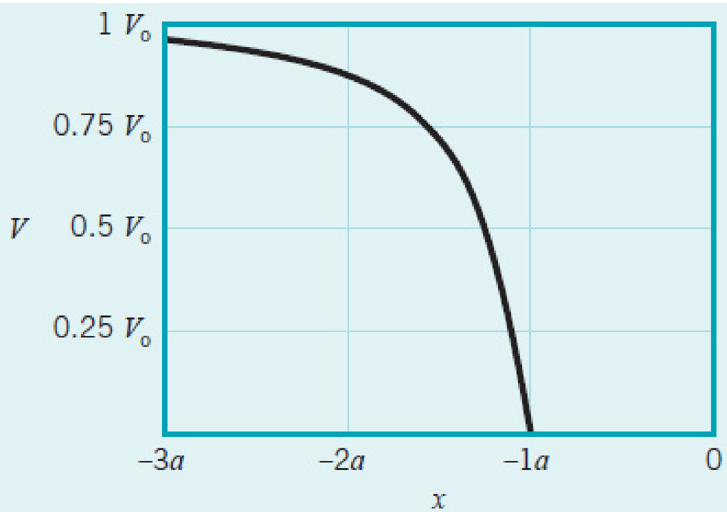
$$V\frac{\partial V}{\partial s} = V\frac{\partial V}{\partial x} = V_0\left(1+\frac{a^3}{x^3}\right)\left(-\frac{3V_0 a^3}{x^4}\right)$$
$$= -3V_0^2\left(1+\frac{a^3}{x^3}\right)\frac{a^3}{x^4}$$

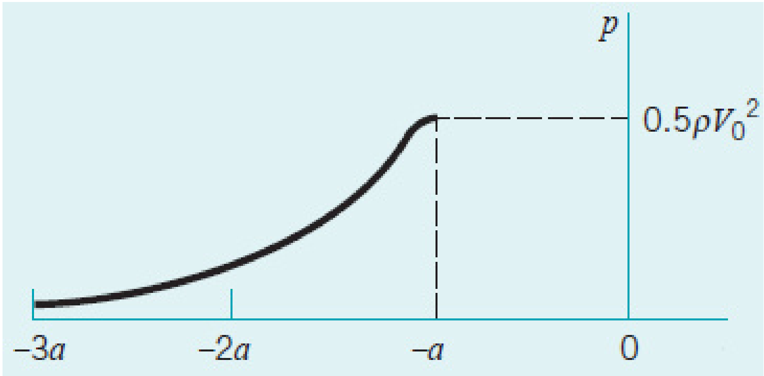
جایگزاری در رابطه ۱

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3\rho a^3 V_0^2 (1 + a^3/x^3)}{x^4}$$

$$p = -\rho V_0^2\left[\left(\frac{a}{x}\right)^3 + \frac{(a/x)^6}{2}\right]$$

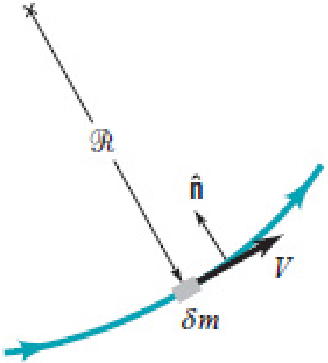






By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

F = *ma* Normal to a Streamline



$$\sum \delta F_n = \frac{\delta m\, V^2}{\mathcal{R}} = \frac{\rho\, \delta \forall\, V^2}{\mathcal{R}}$$

$$\delta \mathcal{W}_n = -\delta \mathcal{W} \cos\theta = -\gamma\, \delta \forall \cos\theta$$

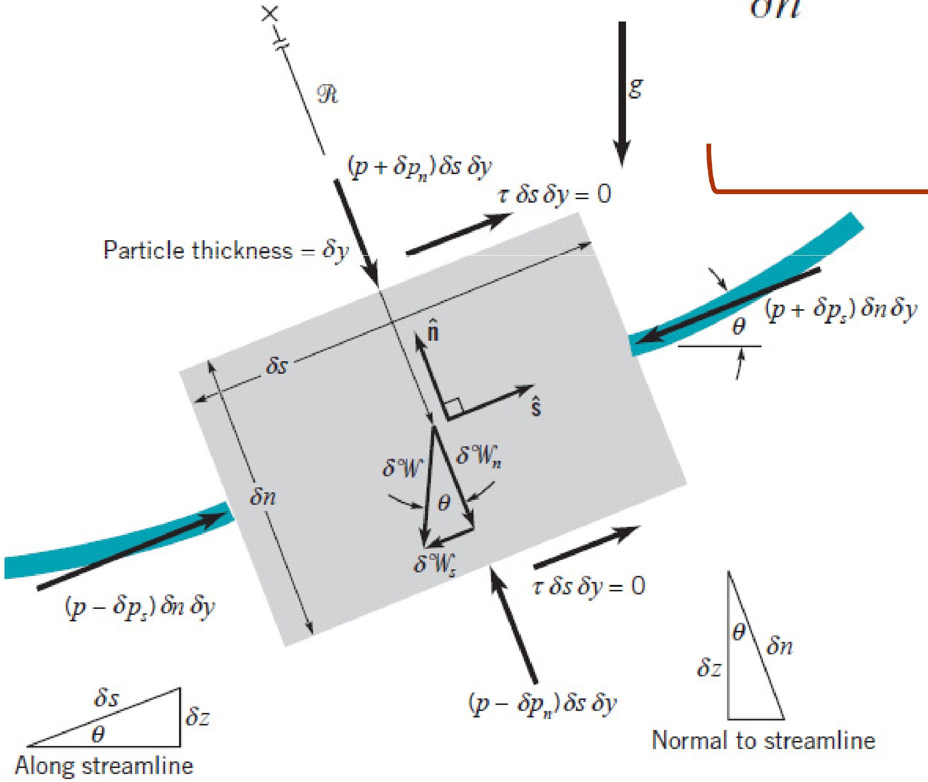
$$\delta F_{pn} = (p - \delta p_n)\,\delta s\,\delta y - (p + \delta p_n)\,\delta s\,\delta y = -2\,\delta p_n\,\delta s\,\delta y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial n}\delta s\,\delta n\,\delta y = -\frac{\partial p}{\partial n}\delta \forall$$

$$\cos\theta = dz/dn$$

$$\sum \delta F_n = \delta \mathcal{W}_n + \delta F_{pn} = \left(-\gamma \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial n}\right)\delta \forall$$

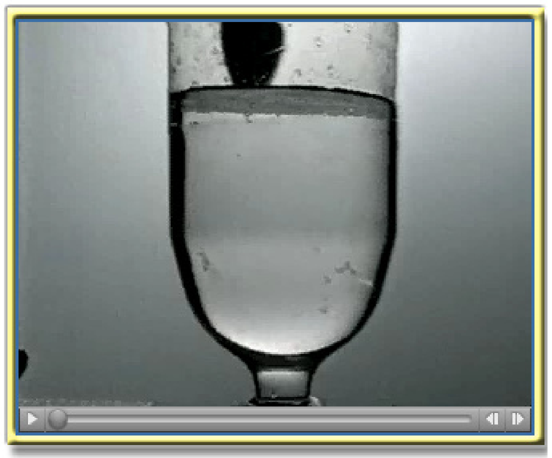
$$-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{\mathcal{R}}$$



در یک صفحه افقی

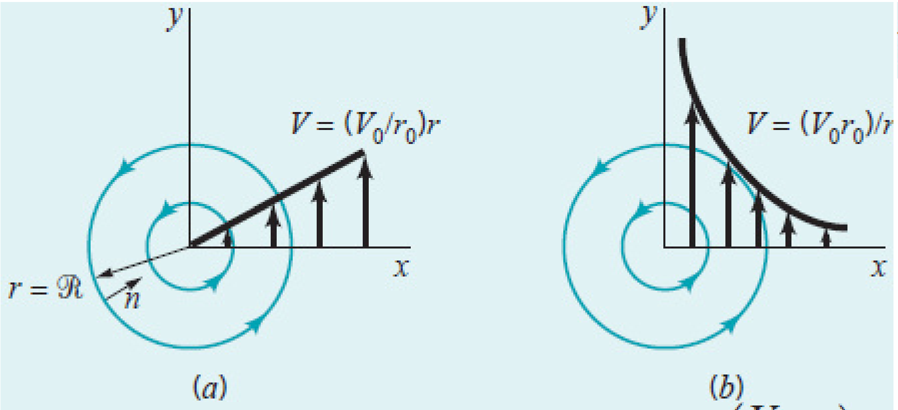
$$(dz/dn = 0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V^2}{\mathcal{R}}$$



By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: دو میدان سرعت برای خطوط جریان دایره ای نمایش داده شده است. توزیع سرعت در هر شکل را بدست آورید



$V(r) = (V_0/r_0)r$

$V(r) = \dfrac{(V_0 r_0)}{r}$

where V_0 is the velocity at $r = r_0$

$p = p_0$ at $r = r_0$

streamlines in the horizontal plane ($dz/dn = 0$)

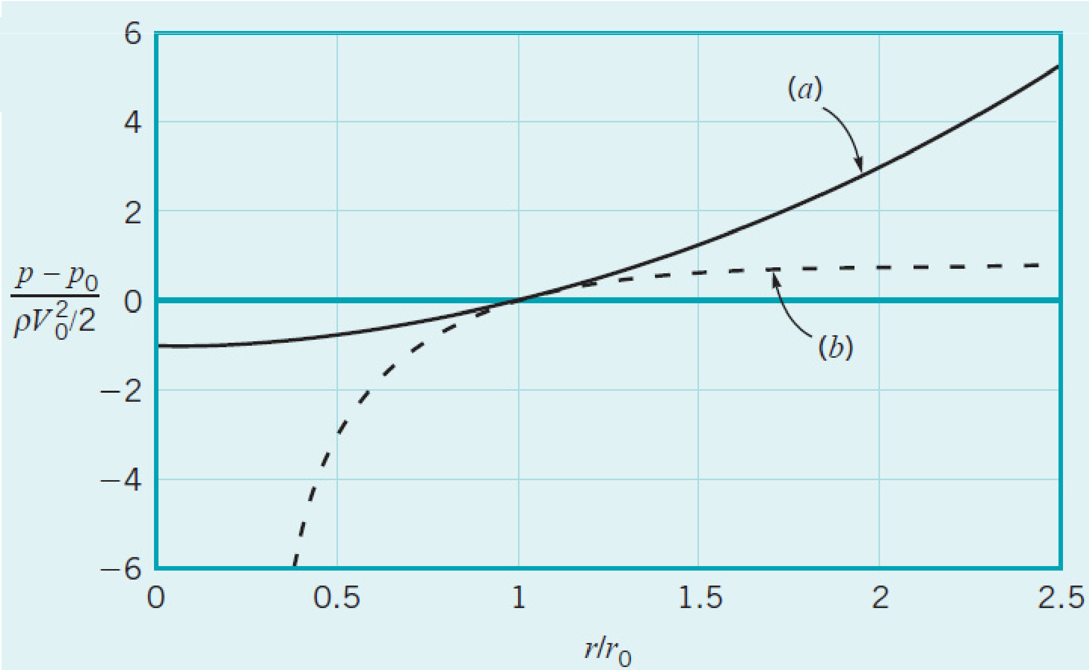
$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho V^2}{r}$$

For case (a) $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \rho (V_0/r_0)^2 r$

for case (b) $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{\rho (V_0 r_0)^2}{r^3}$

For case (a) $p - p_0 = (\rho V_0^2/2)[(r/r_0)^2 - 1]$

for case (b) $p - p_0 = (\rho V_0^2/2)[1 - (r_0/r)^2]$



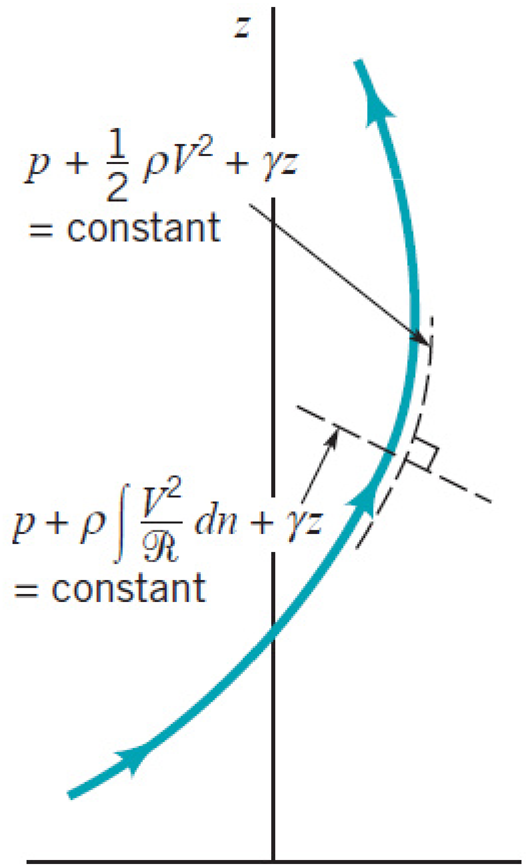
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

$$dn \times \left[-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{\mathcal{R}}\right] \Rightarrow \int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{V^2}{\mathcal{R}} dn + gz = \text{constant across the streamline}$$

$V = V(s, n)$ and $\mathcal{R} = \mathcal{R}(s, n)$ در حالت کلی

Newton's second law applied across the streamlines for steady, inviscid, incompressible flow

$$\boxed{p + \rho \int \frac{V^2}{\mathcal{R}} dn + \gamma z = \text{constant across the streamline}}$$



$$p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \text{constant along the streamline}$$

$$p + \rho \int \frac{V^2}{\mathcal{R}} dn + \gamma z = \text{constant across the streamline}$$

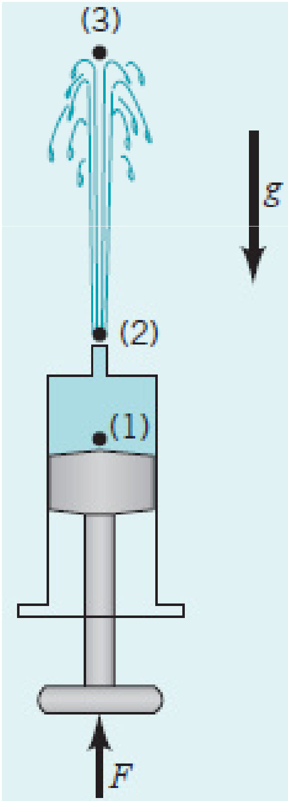
اگرچه روابط فوق برای شرایط دایم، غیر لزج و تراکم پذیر صحیح است ولی برای شرایط واقعی تا حد قابل قبولی درست می باشد.

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{constant on a streamline}$$

z, is related to the potential energy of the particle and is called the ***elevation head*****.**

عبارت فشار $\frac{p}{\gamma}$ ، ارتفاع فشار یا هد فشار نامیده شده که بیانگر ارتفاع مورد نیاز ستون سیال برای تولید فشار p می باشد.

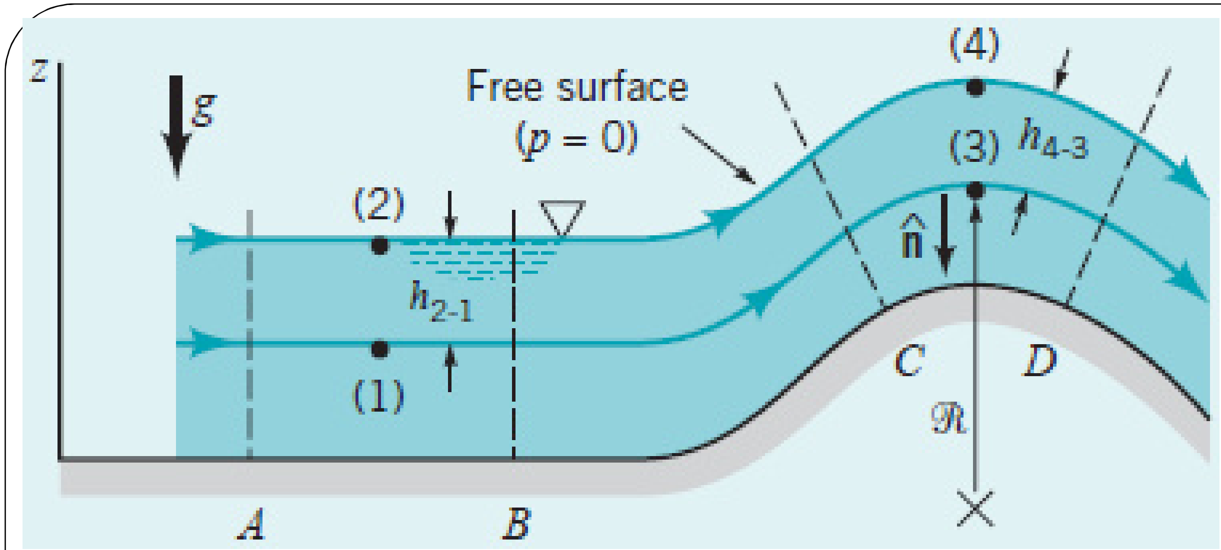
عبارت $V^2/2g$ هد سرعت نامیده شده که برابر با سرعت سیال حاصل از سقوط آزاد از ارتفاع عمودی است که به سرعت V می رسد (بدون وجود اصطکاک)



مثال: برای شکل مقابل در شرایط مختلف نشان داده شده در شکل برای انرژی بصورت مقایسه ای بحث نمایید.

	Energy Type		
Point	**Kinetic** $\rho V^2/2$	**Potential** γz	**Pressure** p
1	Small	Zero	Large
2	Large	Small	Zero
3	Zero	Large	Zero

$$p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \text{constant along the streamline}$$



مثال: برای شکل مقابل در صورت فرض جریان تراکم ناپذیر، دایم و غیر لزج، اختلاف فشار میان نقاط ۱ و ۲ و نقاط ۳ و ۴ را بدست آورید.

$$p + \rho \int \frac{V^2}{\mathcal{R}} dn + \gamma z = \text{constant across the streamline}$$

$$\mathcal{R} = \infty \longrightarrow p + \gamma z = \text{constant}$$

$$p_1 = p_2 + \gamma(z_2 - z_1) = p_2 + \gamma h_{2-1}$$

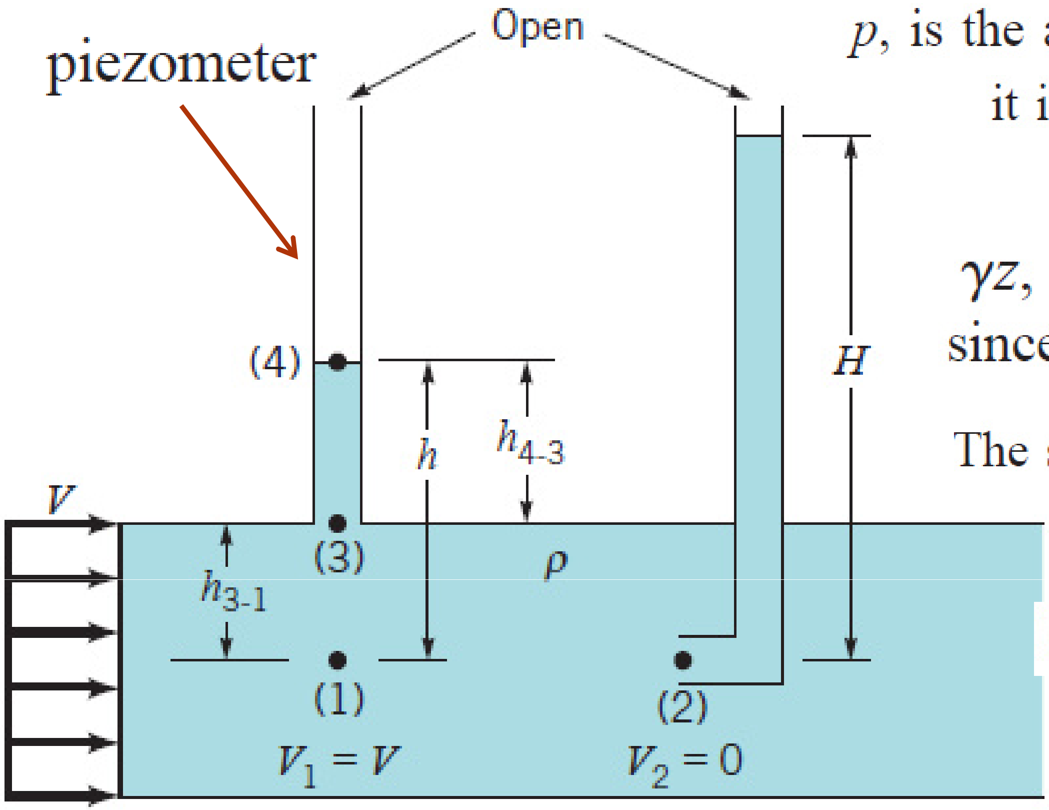
$$p_2 = 0 \text{ (gage)}, z_1 = 0, \text{and } z_2 = h_{2-1}$$

$$(\text{using } dn = -dz) \longrightarrow p_4 + \rho \int_{z_3}^{z_4} \frac{V^2}{\mathcal{R}}(-dz) + \gamma z_4 = p_3 + \gamma z_3$$

$$\text{With } p_4 = 0 \text{ and } z_4 - z_3 = h_{4-3} \longrightarrow p_3 = \gamma h_{4-3} - \rho \int_{z_3}^{z_4} \frac{V^2}{\mathcal{R}} dz$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

Static, Stagnation, Dynamic, and Total Pressure



p, is the actual thermodynamic pressure of the fluid it is normally termed the ***static pressure.***

$$p_3 = \gamma h_{4-3}$$

γz, is termed the *hydrostatic pressure,*

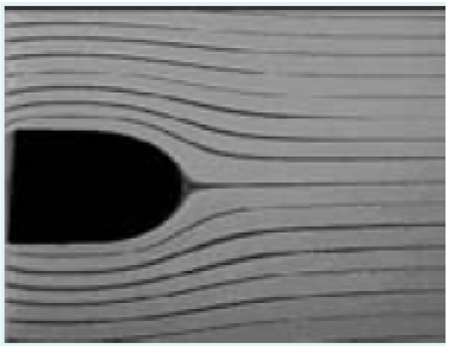
since $h_{3-1} + h_{4-3} = h$ it follows that $p_1 = \gamma h$.

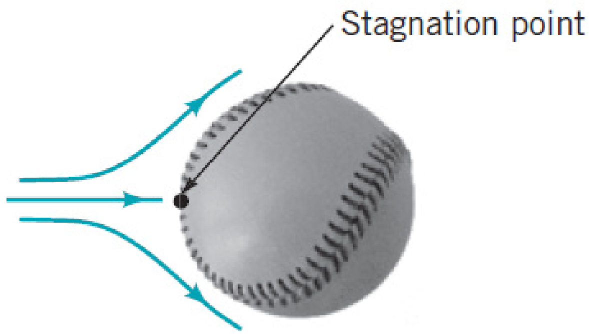
The second term in the Bernoulli equation, $\rho V^2/2$, is termed the ***dynamic pressure.***

$V_2 = 0$, or point (2) is a ***stagnation point.***

$$p_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2$$

در این حالت مایع تا ارتفاع H بالا رفته تا تمام انرژی جنبشی سیال
و فشار سیال با انرژی پتانسیل ناشی از ستون مایع یکی شود





By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

the ***stagnation pressure***, $p + \rho V^2/2$, is the largest pressure

static pressure,

hydrostatic pressure

$$p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = p_T = \text{constant along a streamline}$$

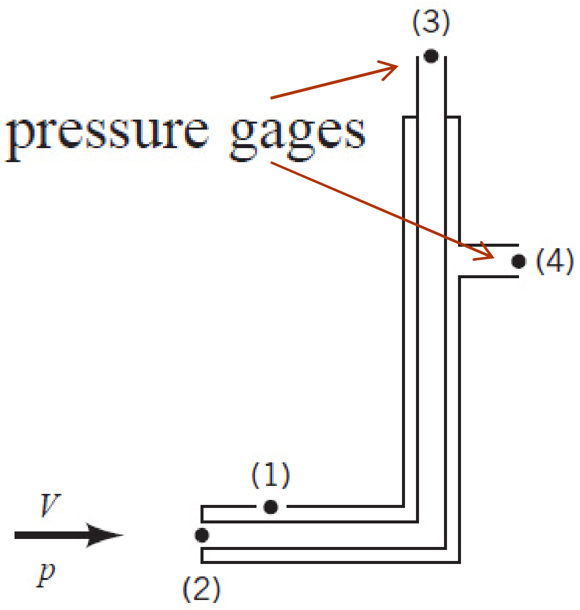
dynamic pressure

the ***total pressure***, p_T.

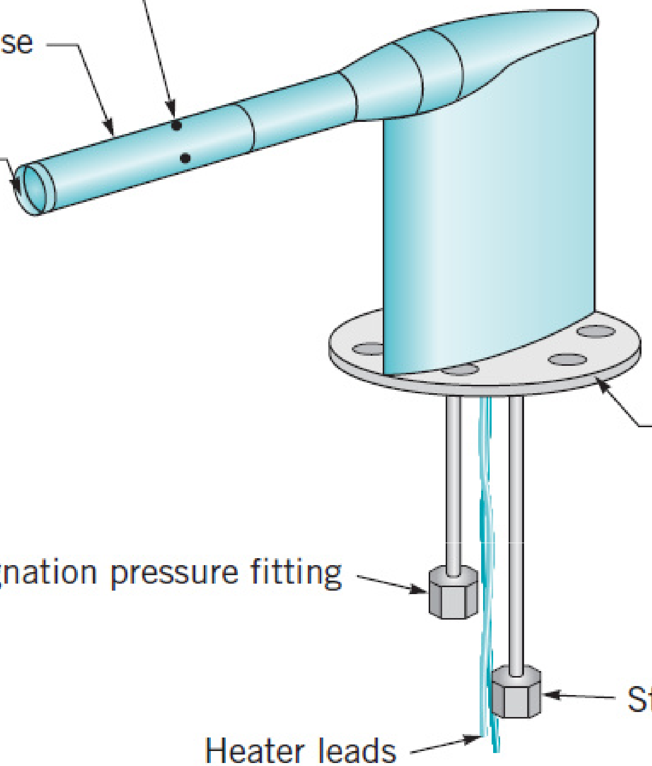
Pitot-static tube

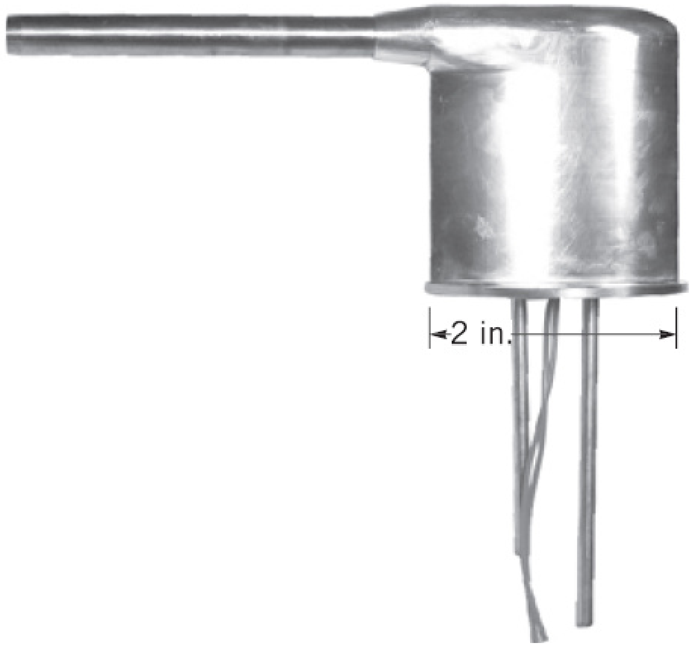
the values of p_3 and p_4 (or the difference $p_3 - p_4$) can be determined

two pressure gages

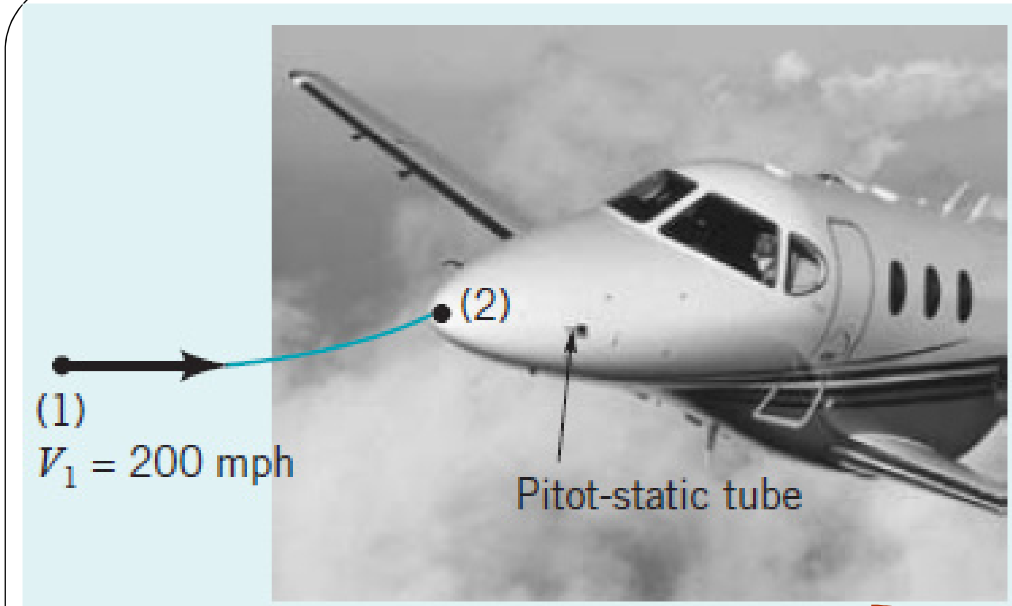


$$\left.\begin{aligned} p_3 &= p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 \\ p_4 &= p_1 = p \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} p_3 - p_4 &= \tfrac{1}{2}\rho V^2 \\ V &= \sqrt{2(p_3 - p_4)/\rho} \end{aligned}$$


Four static pressure ports
Heated outer case
Stagnation pressure port
Mounting flange
Stagnation pressure fitting
Static pressure fitting
Heater leads


2 in.

مثال: هواپیمایی با سرعت ۲۰۰ مایل بر ساعت در ارتفاع ۱۰۰۰۰ فوتی در فشار اتمسفر در حال پرواز است. فشار در نقاط ۱ و ۲ و فشار اندازه گیری شده توسط لوله پیتوت را بدست آورید.



From Table C.1

$$p_1 = 1456 \text{ lb/ft}^2 \text{ (abs)} = 10.11 \text{ psia}$$

$$\rho = 0.001756 \text{ slug/ft}^3$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2}$$

$$V_1 = 200 \text{ mi/hr} = 293 \text{ ft/s} \quad \text{and} \quad V_2 = 0$$

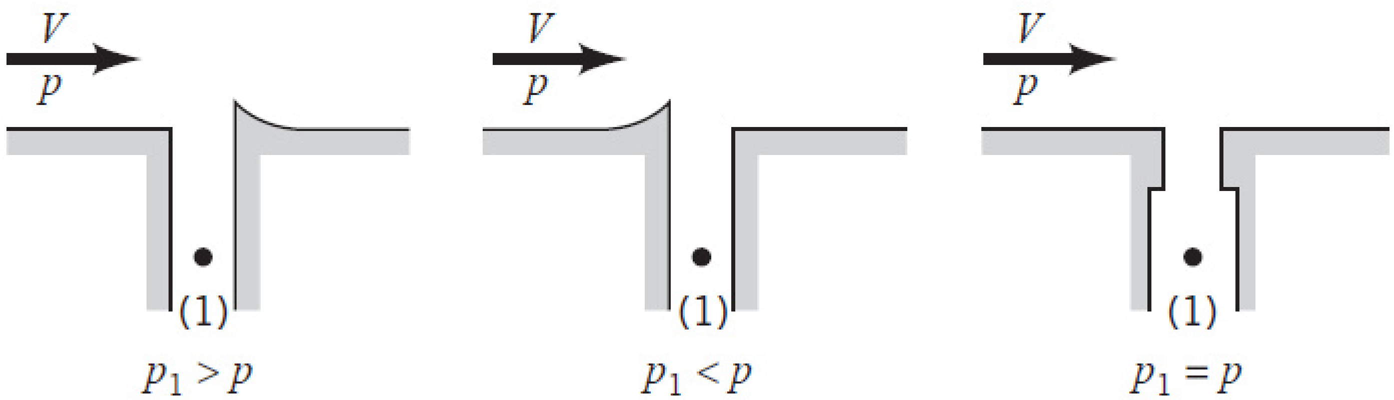
$$p_2 = 1456 \text{ lb/ft}^2 + (0.001756 \text{ slugs/ft}^3)(293^2 \text{ ft}^2/\text{s}^2)/2$$

$$= (1456 + 75.4) \text{ lb/ft}^2 \text{ (abs)}$$

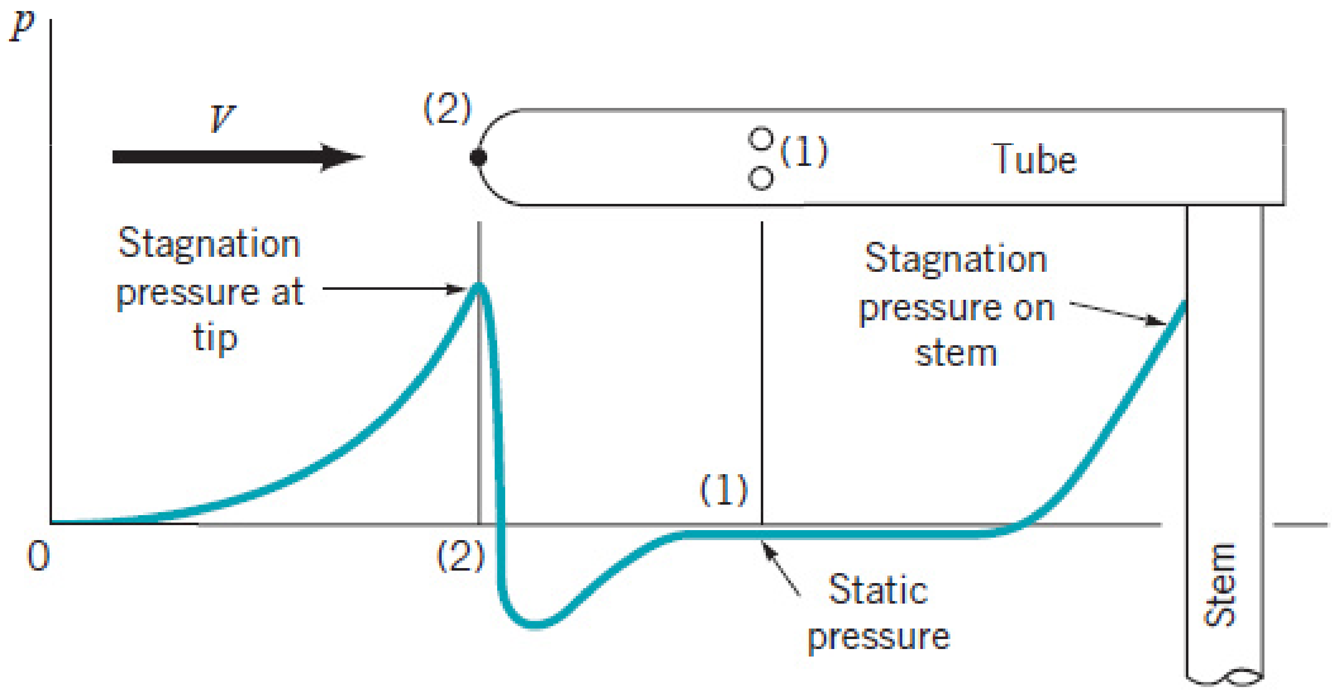
Hence, in terms of gage pressure $\Rightarrow$ $p_2 = 75.4 \text{ lb/ft}^2 = 0.524 \text{ psi}$

the pressure difference indicated by the Pitot-static tube $=$ $p_2 - p_1 = \dfrac{\rho V_1^2}{2} = 0.524 \text{ psi}$

نکته: در تغییرات سرعت بالاتر نیاز است از تغییر دانسیته در محاسبه تغییر فشار استفاده شود (شرایط تراکم پذیر)



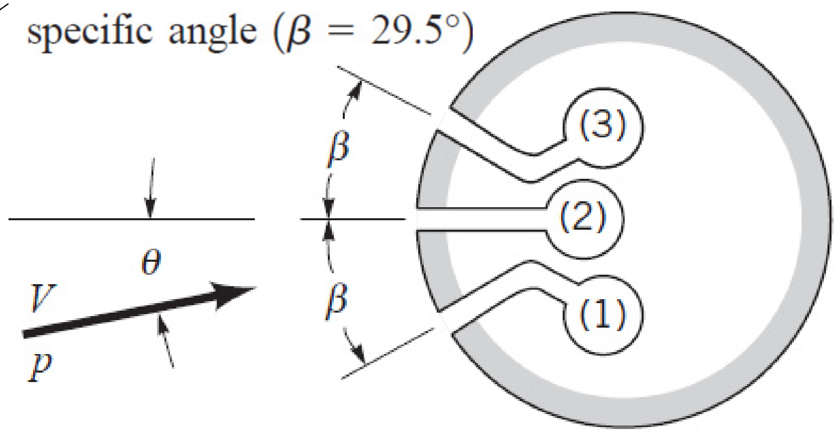
دقت در محاسبه فشار استاتیک با در نظر گرفتن این مطلب که نباید تحت تاثیر انرژی جنبشی (فشار دینامیک) قرار گیرد قابل دسترسی است.



زاویه انحراف بین ۱۲ تا ۲۰ درجه نسبت به راستای منبطق بر حرکت می تواند خطای کمتر از ۱٪ را در محاسبه فشار استاتیک ایجاد نماید.

غالبا اندازه گیری فشار استاتیک به مراتب از فشار سکون دشوارتر می باشد

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



If $\theta = 0$

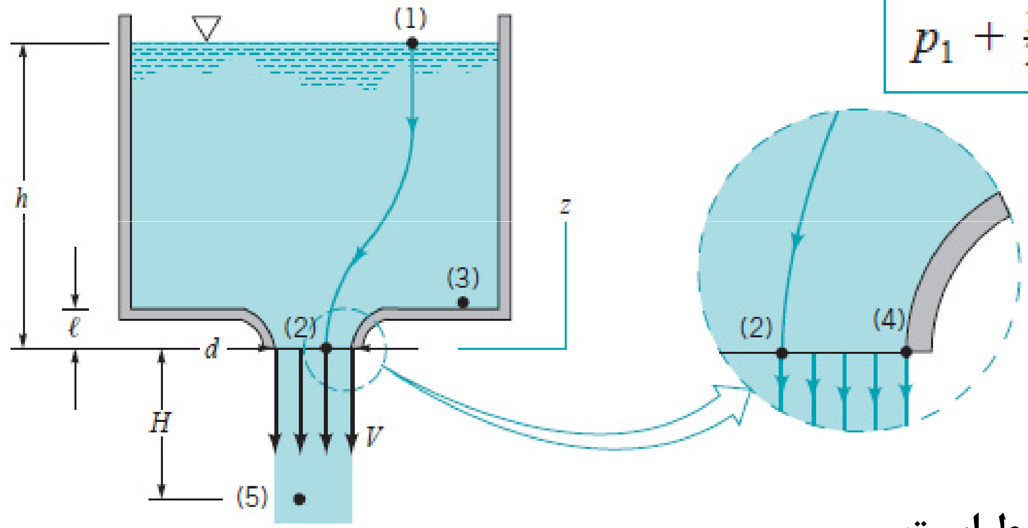
$$p_1 = p_3 = p$$

$$p_2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

با استفاده از اندازه گیری فشار در مجرای ۱ و ۳، در صورت برابر بودن ، مجرای ۲ مستقیما در مسیر جریان قرار داشته و می تواند فشار سکون را بدرستی محاسبه نماید

جریان جت آزاد

$$\boxed{p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2}$$



با فرض بزرگ بودن منبع $(V_1 \cong 0)$

$$\underbrace{(p_1 = 0 \text{ gage}) \quad \text{"free jet"} \; (p_2 = 0)}$$

$$V = \sqrt{2\frac{\gamma h}{\rho}} = \sqrt{2gh}$$

فشار خروجی سیال تراکم ناپذیر یک جت برابر با فشار محیط است

outside the nozzle

$$(p_5 = 0)$$

between points (1) and (5)

$$V = \sqrt{2g\,(h + H)}$$

across the streamlines between (2) and (4)

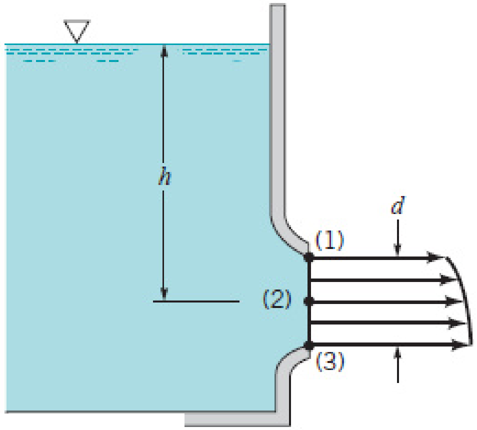
$$(\mathscr{R} = \infty) \Rightarrow p_2 = p_4$$

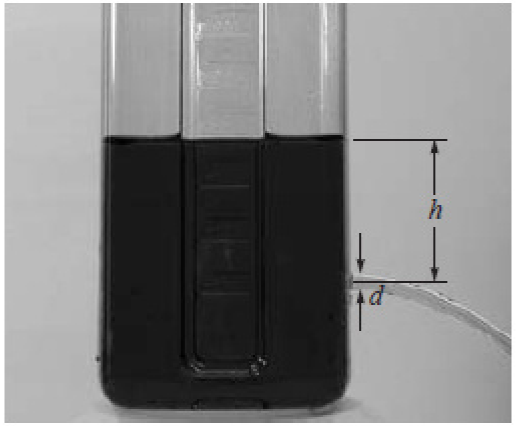
between points (3)and (4) $\quad V_3 = 0$

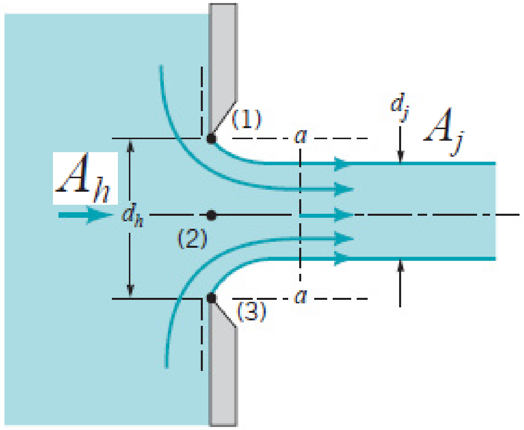
$$z_4 = 0,\ z_3 = \ell \qquad p_3 = \gamma(h - \ell)$$

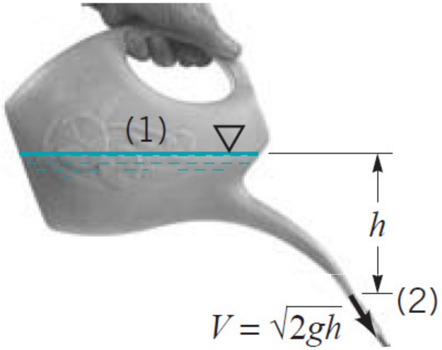
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

انقباض جت سیال



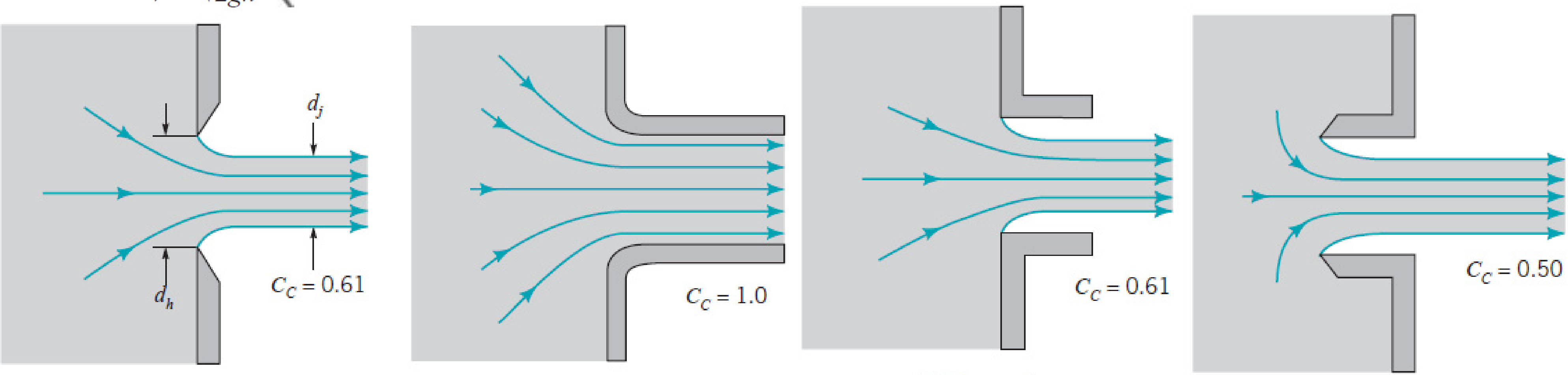






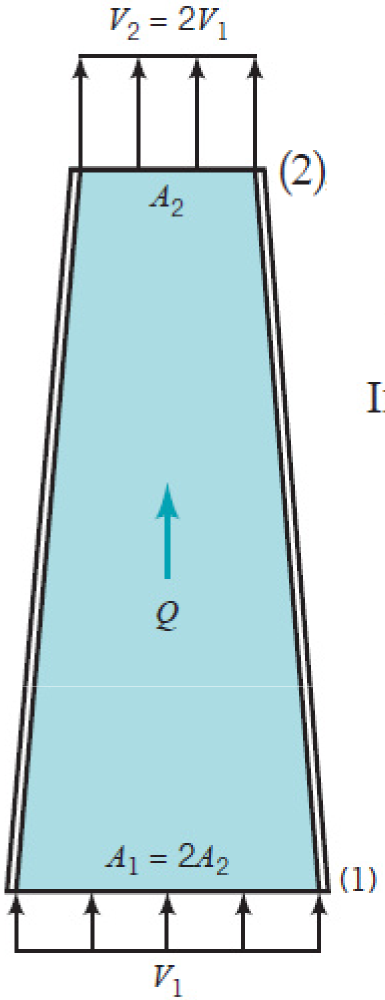
غالبا قطر جت سیال از قطر خروجی سیال کوچکتر است.

انقباض جت سیال تابع هندسه محل خروجی جت می باشد. $C_c = A_j/A_h$ ضریب فشردگی



(a) Knife edge (b) Well rounded (c) Sharp edge (d) Re-entrant

$$C_c = A_j/A_h = (d_j/d_h)^2$$



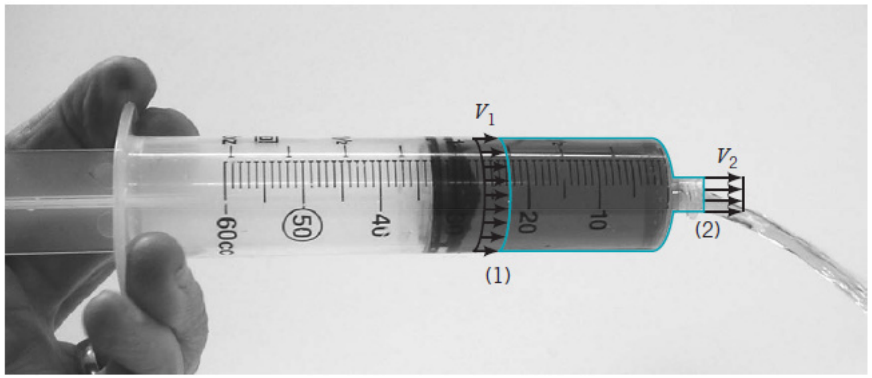
$\dot{m} = \rho Q$, where Q (ft³/s or m³/s)

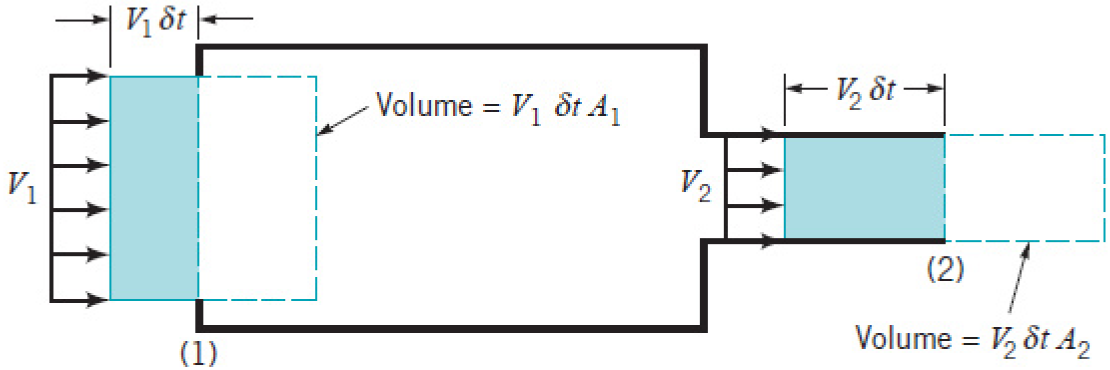
volume flowrate

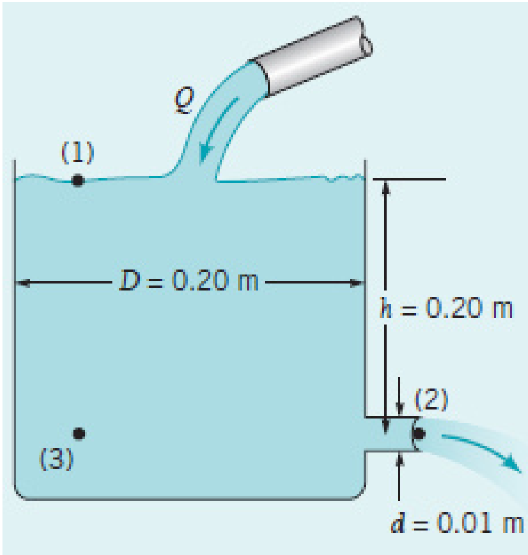
$$Q = VA \Rightarrow \dot{m} = \rho VA$$

(1) and the outlet as (2), it follows that $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$

If the density remains constant, then $\rho_1 = \rho_2$: $\Rightarrow$ $\boxed{A_1 V_1 = A_2 V_2, \text{ or } Q_1 = Q_2}$







مثال: دبی مورد نیاز ورودی از طریق بطری به مخزن سیال سرد را طوری بدست آورید که ارتفاع سیال در مخزن ثابت بماند.

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

$$p_1 = p_2 = 0,\ z_1 = h, \text{ and } z_2 = 0$$

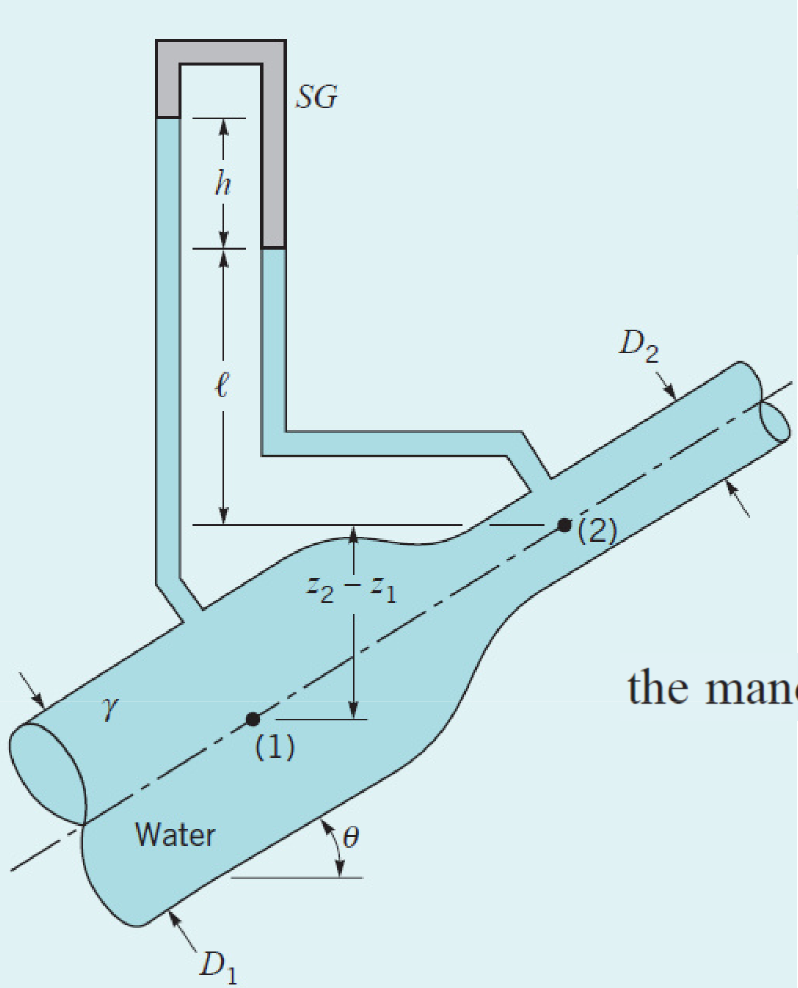
$$\tfrac{1}{2}V_1^2 + gh = \tfrac{1}{2}V_2^2 \quad 1$$

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 \\ Q &= AV \end{aligned}\right\} \quad A_1V_1 = A_2V_2 \rightarrow \frac{\pi}{4}D^2V_1 = \frac{\pi}{4}d^2V_2 \rightarrow V_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_2 \quad 2$$

$$2 \xrightarrow[\text{جایگزاری}]{} 1 \rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-(d/D)^4}} = \sqrt{\frac{2(9.81\ \mathrm{m/s^2})(0.20\ \mathrm{m})}{1-(0.01\ \mathrm{m}/0.20\ \mathrm{m})^4}} = 1.98\ \mathrm{m/s}$$

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2 = \frac{\pi}{4}(0.01\ \mathrm{m})^2(1.98\ \mathrm{m/s})$$
$$= 1.56 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$$

مثال: در شکل مقابل، از یک مانومتر معکوس برای اندازه گیری فشار بین نقاط ۱ و ۲ که حاوی یک نوع روغن با SG کوچکتر از یک است، استفاده می گردد. مقدار ارتفاع h را بدست آورید.



With the assumptions of steady, inviscid, incompressible flow,

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho V_2^2\left[1 - (A_2/A_1)^2\right]$$

the manometer $\Rightarrow$ $p_1 - \gamma(z_2 - z_1) - \gamma\ell - \gamma h + SG\,\gamma h + \gamma\ell = p_2$

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + (1 - SG)\gamma h$$

$$(1 - SG)\gamma h = \frac{1}{2}\rho V_2^2\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

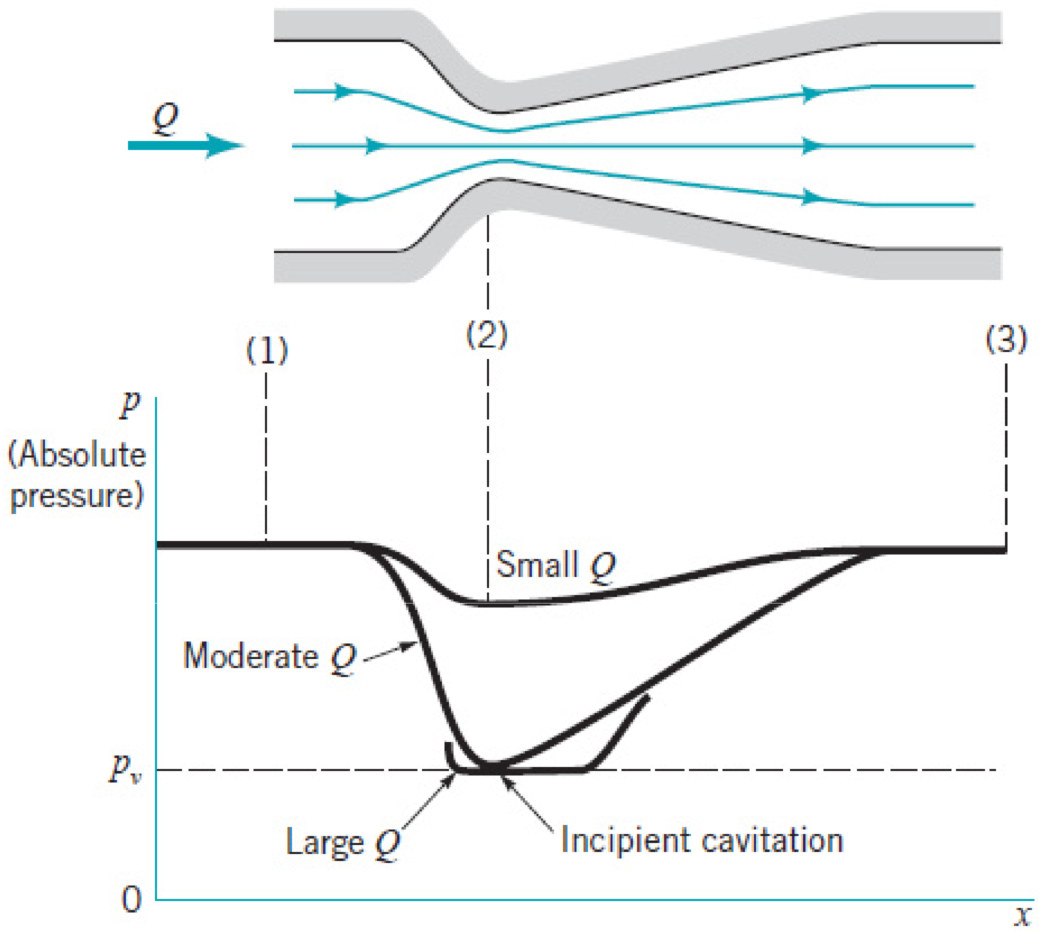
$$V_2 = Q/A_2$$

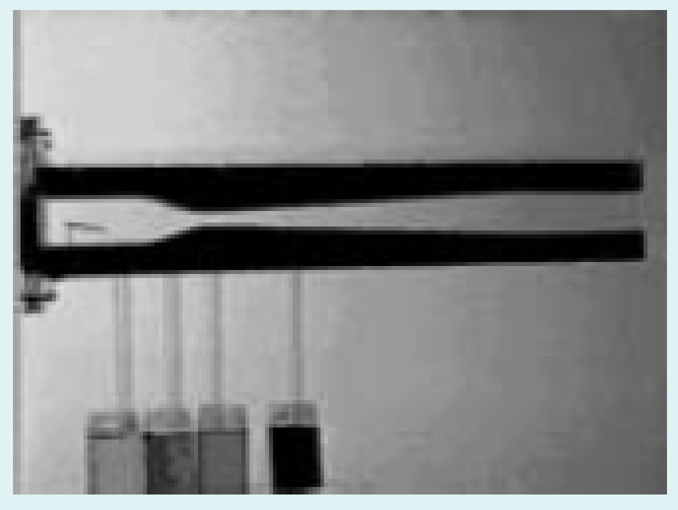
$$h = (Q/A_2)^2 \frac{1 - (A_2/A_1)^2}{2g(1 - SG)}$$

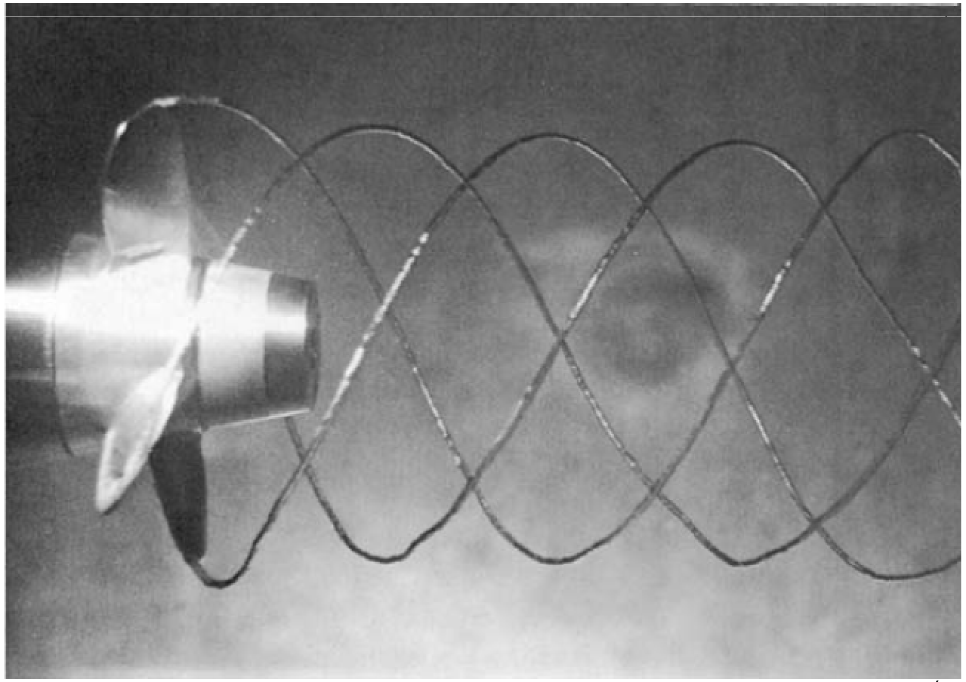
دقت شود برای یک دبی ثابت، ارتفاع h مانومتر وابسته به زاویه قرار گیری لوله نبوده ولی در صورت استفاده از فشار سنج، زاویه θ تاثیر گذار خواهد بود.

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

In general, an increase in velocity is accompanied by a decrease in pressure.







Cavitation occurs when the pressure is reduced to the vapor pressure.

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: در شکل مقابل تخلیه سیال از یک ظرف با استفاده از یک لوله خمیده را نشان می دهد.
ماکزیمم مقدار H را طوری بدست آورید که کاویتاسیون در لوله رخ ندهد.

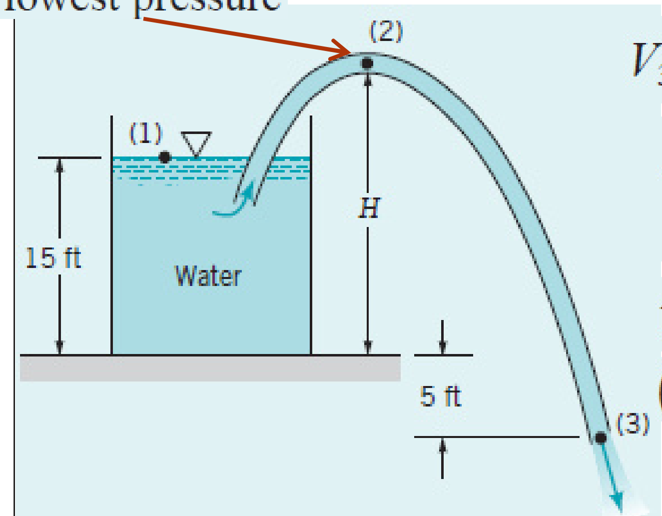
$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 = p_3 + \tfrac{1}{2}\rho V_3^2 + \gamma z_3$$

$z_1 = 15$ ft, $z_2 = H$, $z_3 = -5$ ft. $p_3 = 0$ (free jet)

$V_1 = 0$ (large tank), $p_1 = 0$ (open tank),

from the continuity equation $A_2V_2 = A_3V_3$

constant diameter $\Rightarrow$ $V_2 = V_3$



$$V_3 = \sqrt{2g(z_1 - z_3)} = \sqrt{2(32.2\ \text{ft/s}^2)[15 - (-5)]\ \text{ft}} = 35.9\ \text{ft/s} = V_2$$

$$p_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 - \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 - \gamma z_2$$
$$= \gamma(z_1 - z_2) - \tfrac{1}{2}\rho V_2^2$$

the vapor pressure of water at 60 °F is 0.256 psia

($p_1 = 0$), we must use gage pressure at point (2) also

$$p_2 = 0.256 - 14.7 = -14.4\ \text{psi}$$

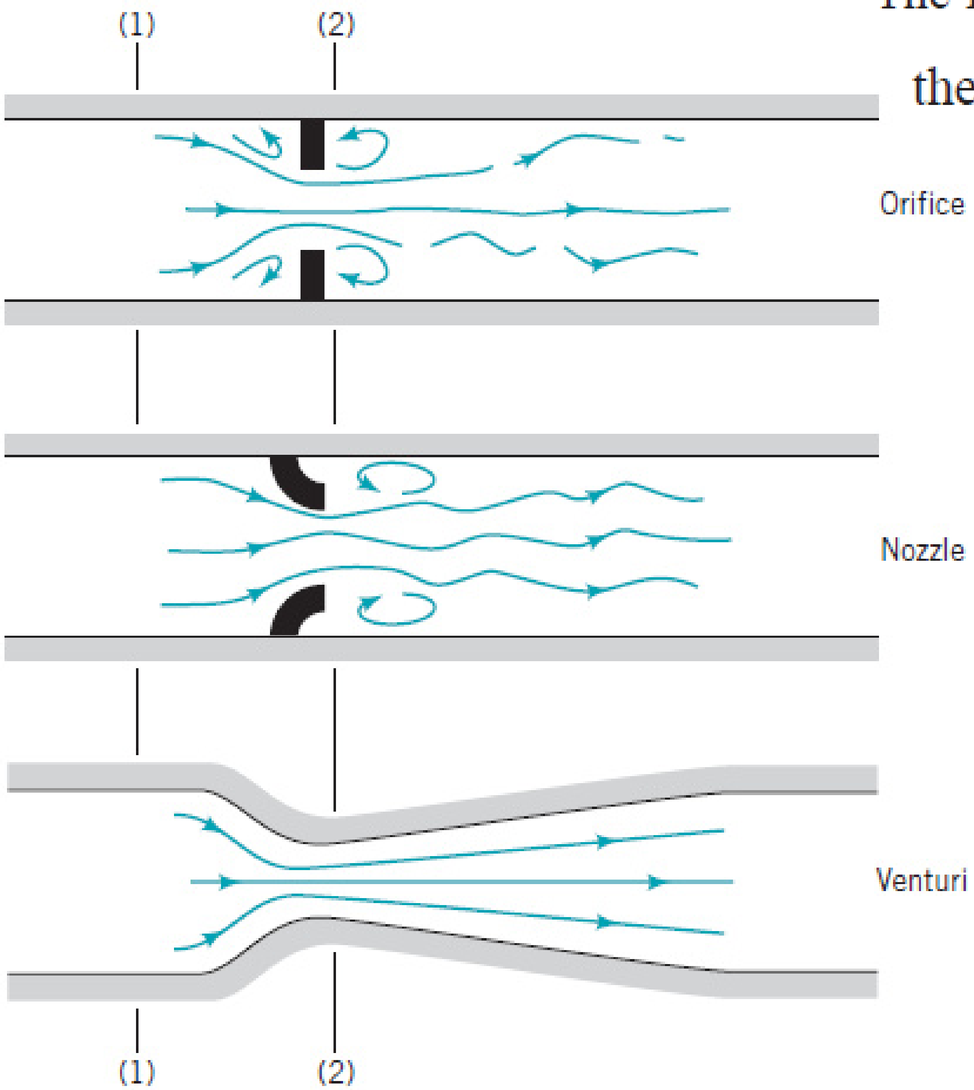
$\Rightarrow$ $H = 28.2$ ft $=$ z_2

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

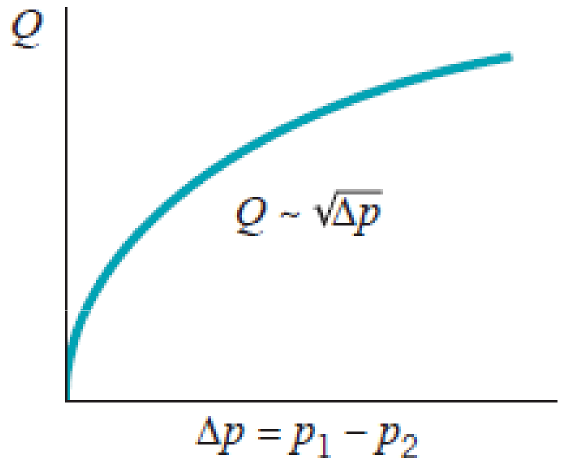
Flowrate Measurement

The Bernoulli equation $p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$

the continuity equation $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$



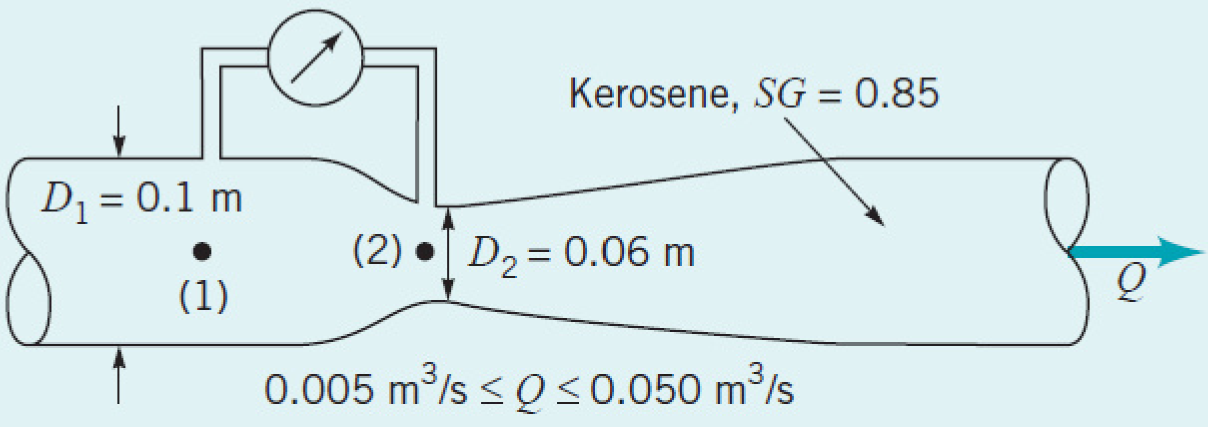
$(A_2 < A_1)$ → $\boxed{Q = A_2 \sqrt{\dfrac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}}$



با توجه به فرضیات مورد استفاده، مقدار واقعی دبی از مقدار بدست آمده توسط رابطه فوق کمتر بوده که این مقدار اختلاف بین ۱ الی ۲٪ و حتی گاهی به ۴۰٪ نیز میرسد. این موضوع بستگی به هندسه مورد استفاده مربوط می شود.

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: برای سیال نفت سفید عبوری از ونتوری با دبی بین ۰/۰۰۵ الی ۰/۰۵ متر مکعب بر ثانیه، اختلاف فشار بین نقاط ۱ و ۲ را بدست آورید



$$Q = A_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \rightarrow p_1 - p_2 = \frac{Q^2\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}{2\,A_2^2}$$

$$\rho = SG\,\rho_{H_2O} = 0.85(1000\text{ kg/m}^3) = 850\text{ kg/m}^3$$

$$1.16\text{ kPa} \le p_1 - p_2 \le 116\text{ kPa}$$

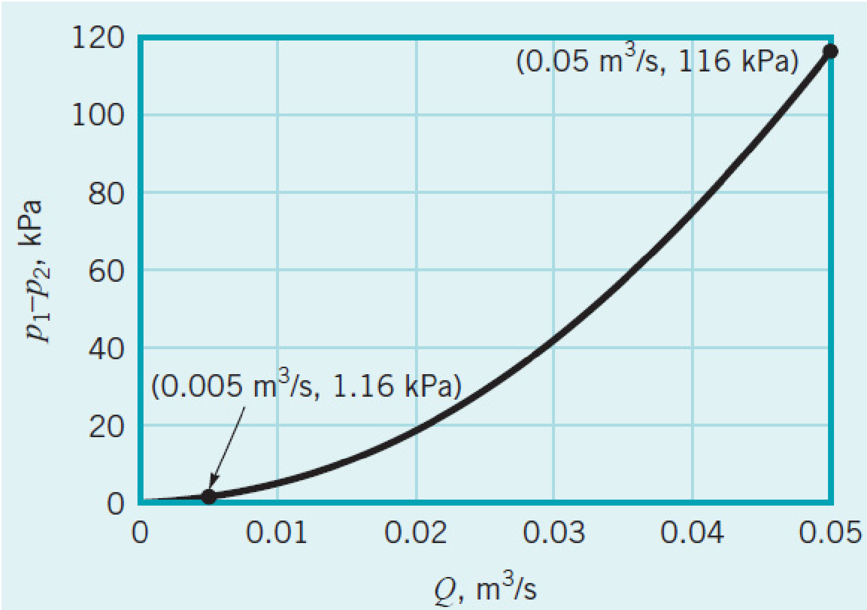
$$A_2/A_1 = (D_2/D_1)^2 = (0.06\text{ m}/0.10\text{ m})^2 = 0.36$$

$$p_1 - p_2 = (0.005\text{ m}^3\text{/s})^2(850\text{ kg/m}^3)\frac{(1 - 0.36^2)}{2\,[(\pi/4)(0.06\text{ m})^2]^2}$$

$$= 1160\text{ N/m}^2 = 1.16\text{ kPa}$$

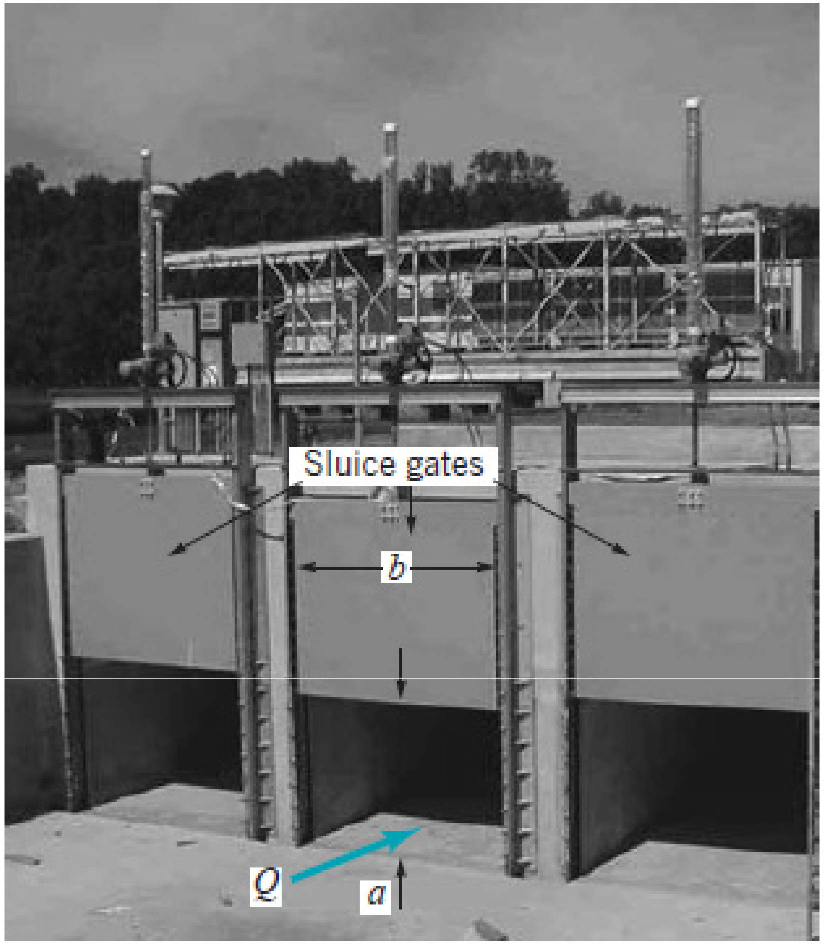
$$p_1 - p_2 = (0.05)^2(850)\frac{(1 - 0.36^2)}{2[(\pi/4)(0.06)^2]^2}$$

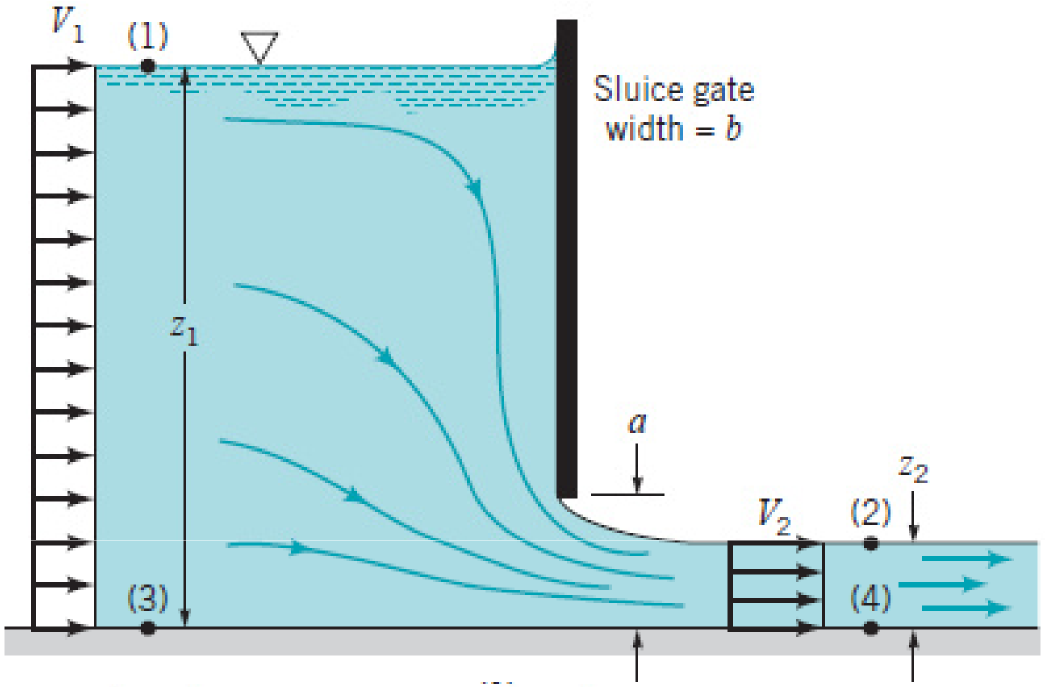
$$= 1.16 \times 10^5\text{ N/m}^2 = 116\text{ kPa}$$



By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

دریچه تخلیه





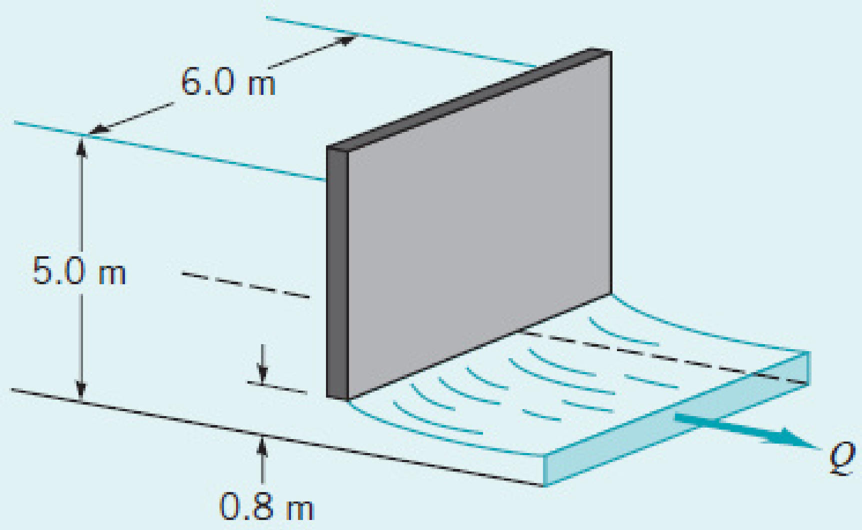
$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

if the gate is the same width as the channel ➡ $A_1 = bz_1$ and $A_2 = bz_2$

$$\left.\begin{aligned} Q = A_1V_1 = bV_1z_1 = A_2V_2 = bV_2z_2 \\ p_1 = p_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad Q = z_2 b\sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 - (z_2/z_1)^2}}$$

In the limit of $z_1 \gg z_2$ ➡ $Q = z_2 b\sqrt{2gz_1}$

مثال: در شکل مقابل مقدار دبی خروجی از دریچه را محاسبه نمایید.



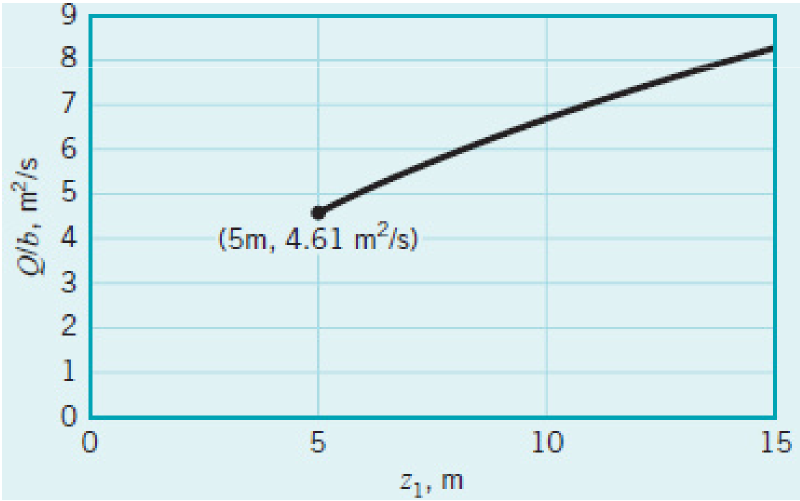
steady, inviscid, incompressible flow,

$$\frac{Q}{b} = z_2 \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 - (z_2/z_1)^2}}$$

In this instance $z_1 = 5.0$ m and $a = 0.80$ m

$a/z_1 = 0.16 < 0.20$ → approximately $C_c = 0.61$ → Thus, $z_2 = C_c a = 0.61$ $= 0.488$ m

$$\frac{Q}{b} = (0.488 \text{ m})\sqrt{\frac{2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ m} - 0.488 \text{ m})}{1 - (0.488 \text{ m}/5.0 \text{ m})^2}}$$
$$= 4.61 \text{ m}^2/\text{s}$$



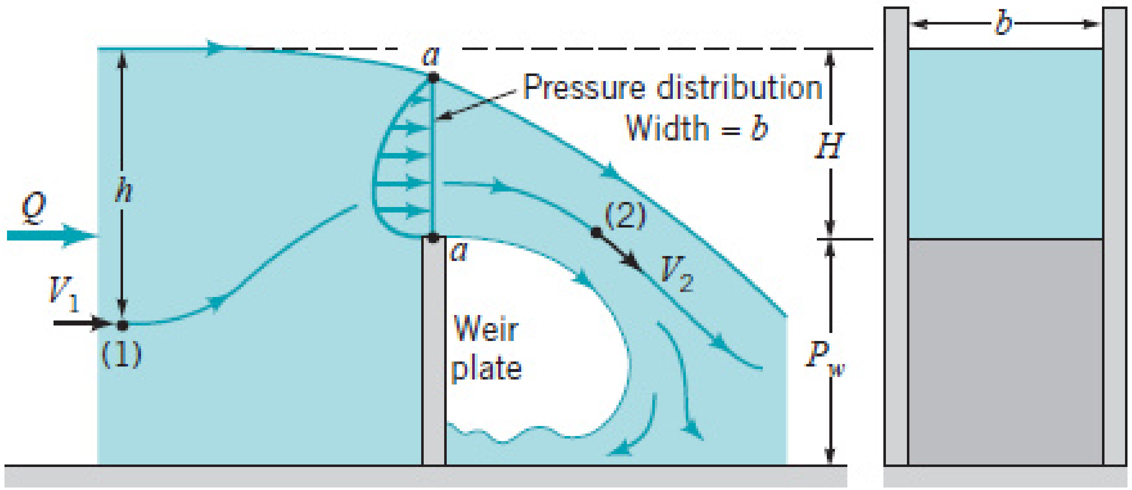
COMMENT If we consider $z_1 \gg z_2$ and neglect the kinetic energy of the upstream fluid, we would have

→ $Q = z_2 b\sqrt{2gz_1}$

$$\frac{Q}{b} = z_2\sqrt{2gz_1} = 0.488 \text{ m}\sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ m})}$$
$$= 4.83 \text{ m}^2/\text{s}$$

نکته: در صورت افزایش ارتفاع سیال بالادست به دو برابر، دبی دو برابر نمی شود.

استفاده از سد یا آب بند



در این روش با فرض ساده می توان جریان را مشابه جریان در اریفیس دانست

سرعت $= \sqrt{2gH}$

برای محاسبه C_1 از روش تجربی استفاده می شود.

$$Q = C_1 H b \sqrt{2gH} = C_1 b \sqrt{2g}\, H^{3/2}$$

C_1 is a constant to be determined.

خط انرژی و خط شیب هیدرولیک

hydraulic grade line (HGL) and the *energy line* (EL)

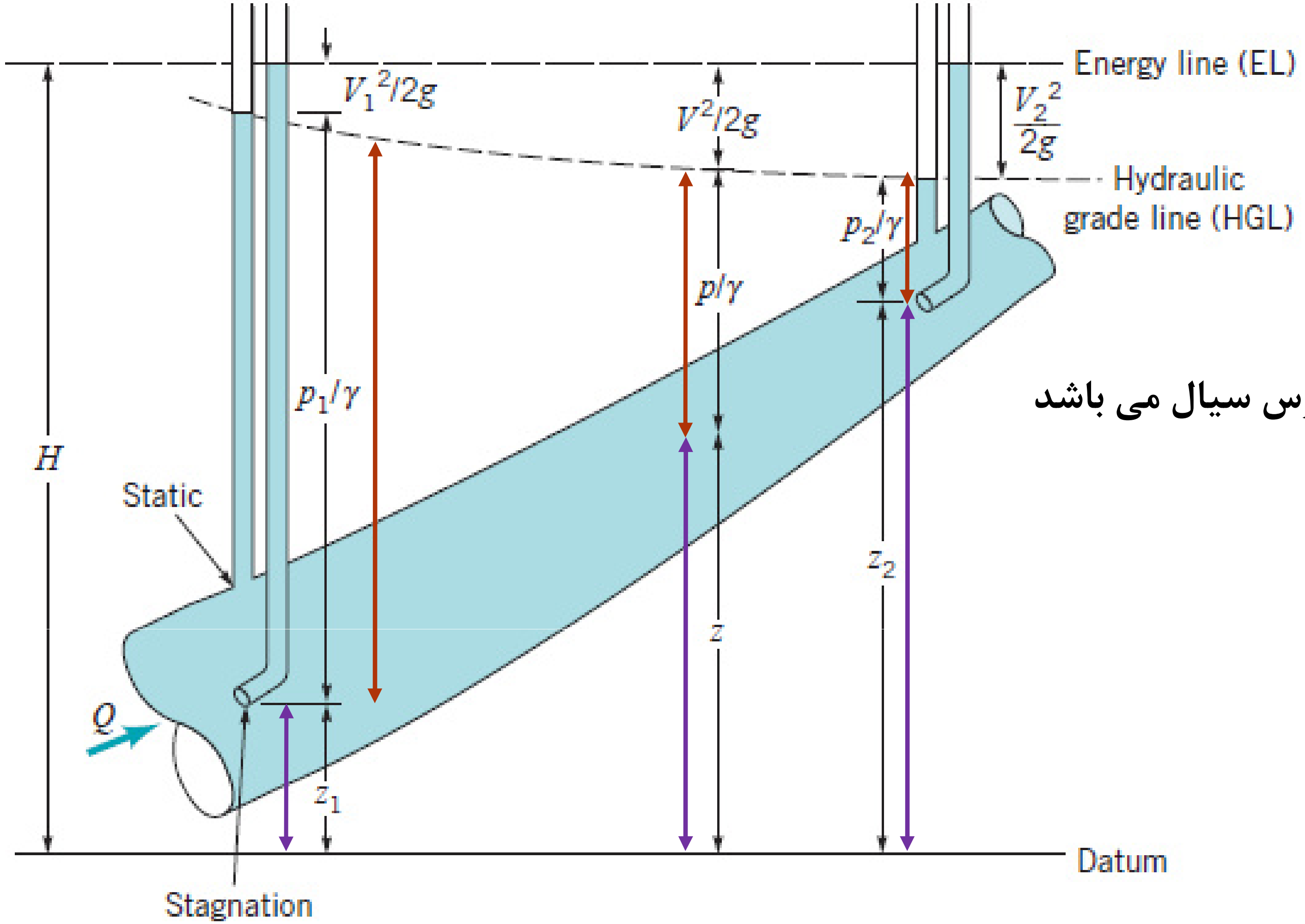
روش ترسیمی رابطه برنولی است.

با تقسیم رابطه برنولی بر وزن مخصوص مفهوم هد یا ارتفاع حاصل می شود

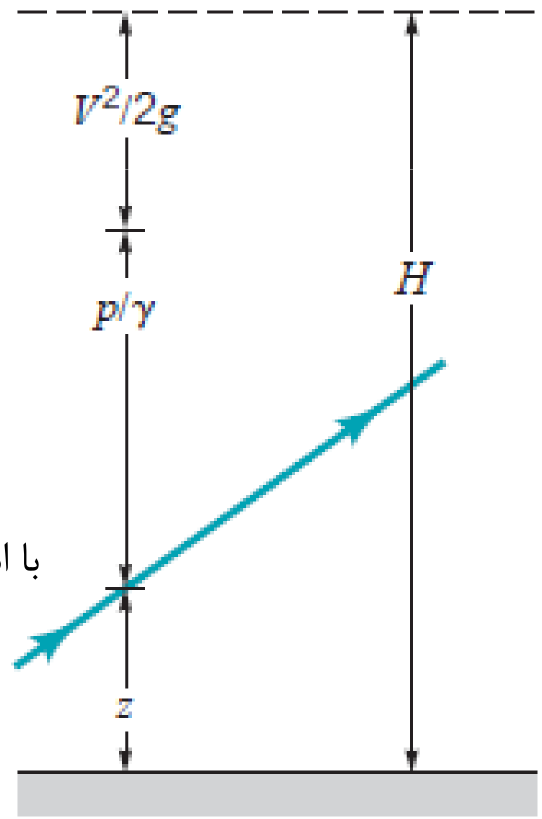
$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{constant on a streamline} = H$$

$\boxed{\textit{total head}}$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



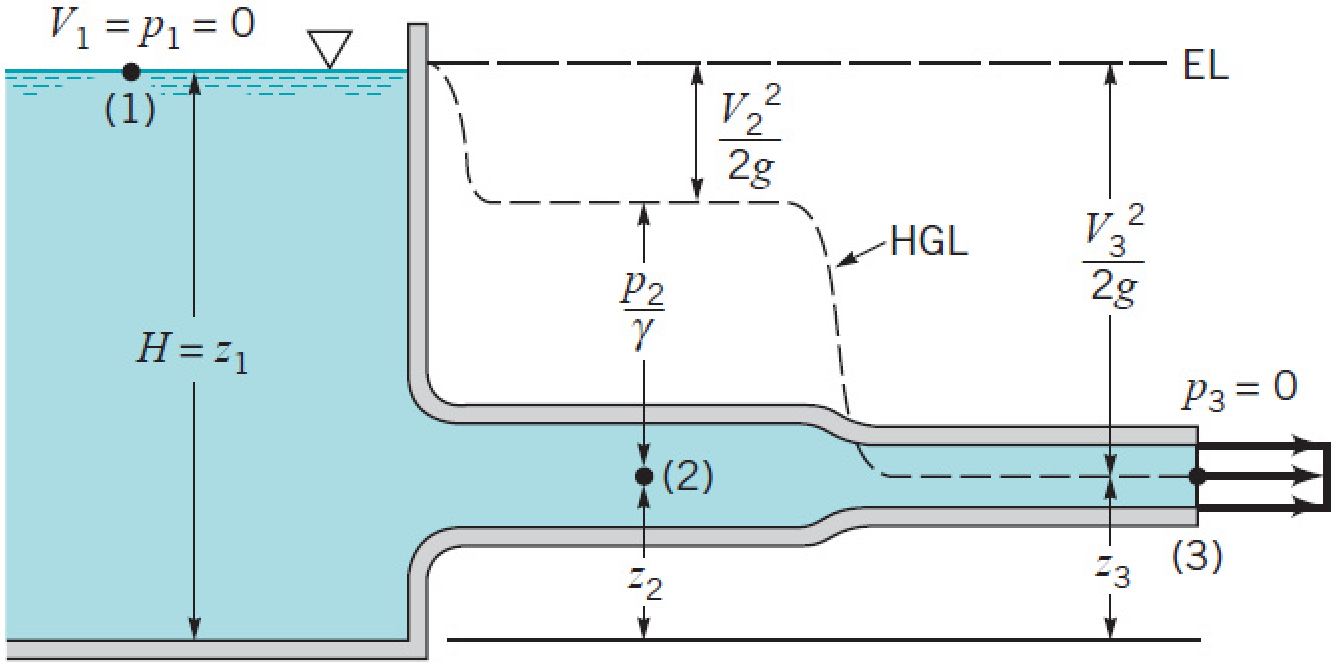
خط انرژی بیانگر هد کلی در دسترس سیال می باشد



با استفاده از اندازه گیری فشار سکون می توان هد کلی را بدست آورد (با استفاده از لوله پیتوت)

$p/\gamma + z$. This sum is often called the *piezometric head.*

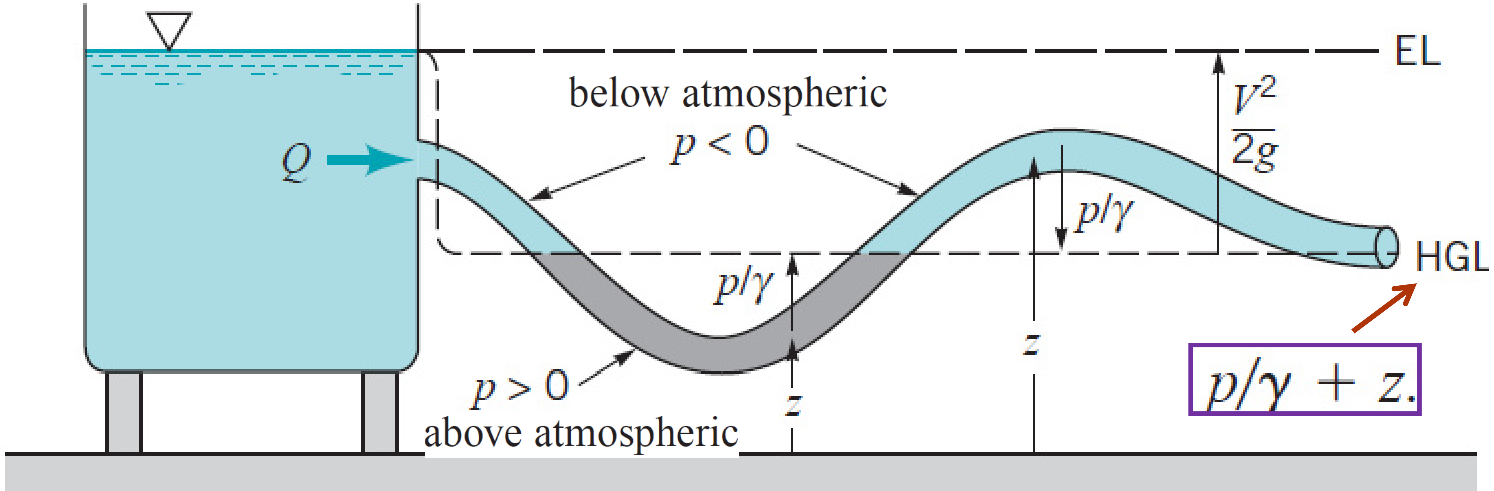
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



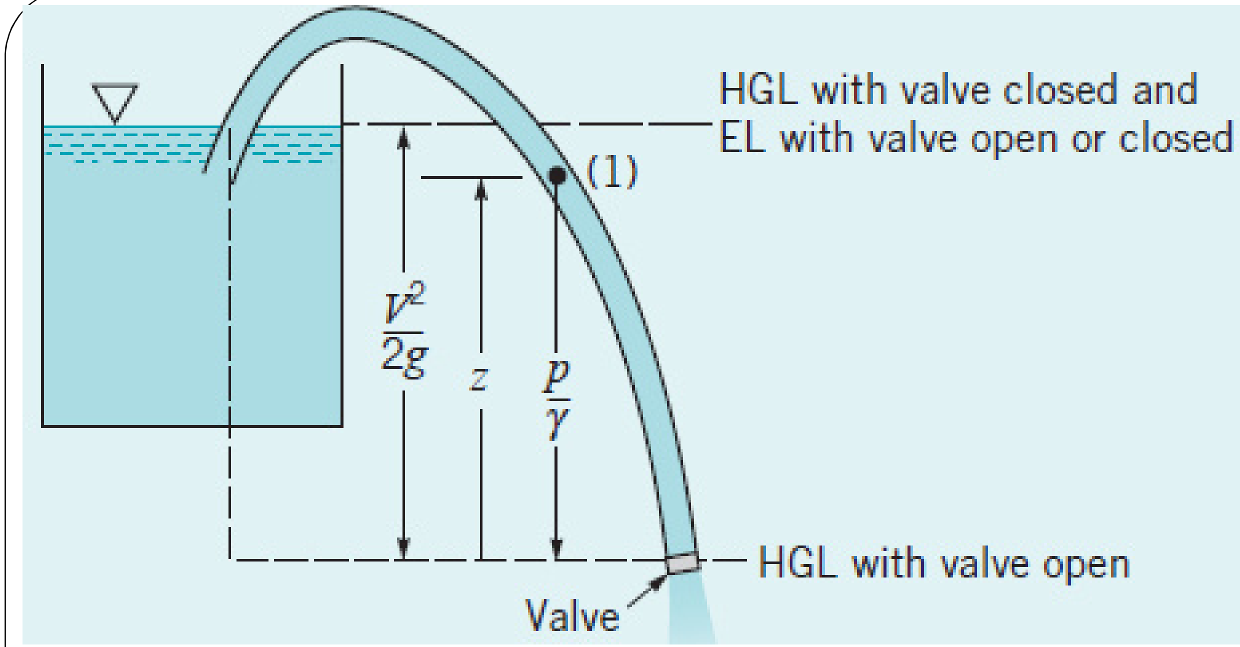
Under the assumptions of the Bernoulli equation, the energy line is horizontal.

فاصله بین شیب خط هیدرولیکی و لوله یا کانال متناسب با فشار سیال در آن است

The hydraulic grade line lies a distance of one velocity head, $V^2/2g$, below the energy line.



For flow below (above) the hydraulic grade line, the pressure is positive (negative).



مثال: در شکل مقابل در صورتی که در نقطه ۱ سوراخی در لوله وجود داشته باشد، سیال به بیرون می ریزد یا هوا وارد لوله می شود.؟

با فرض سیال تراکم ناپذیر و غیر لزج، و در نظر گرفتن سطح مقطع ثابت لوله و دبی ثابت سیال، سرعت در طول لوله ثابت بوده در نتیجه با استفاده از روش ترسیمی خط انرژی و شیب خط هیدرولیکی، شیب خط هیدرولیک یک مقدار ثابت می باشد.
نقاط بالای این شیب دارای فشار منفی بوده و لذا در نقطه شماره ۱ فشار منفی و هوا به داخل لوله نفوذ می نماید.

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

محدودیتهای استفاده از رابطه برنولی- تراکم پذیری

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = C \qquad \text{(along a streamline)}$$

isothermal flow $p = \rho RT$; $\rightarrow$ $\rho = p/RT$ $\rightarrow$ $RT\int \frac{dp}{p} + \frac{1}{2}V^2 + gz = \text{constant}$

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{RT}{g}\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

برای دو نقطه در روی یک خط جریان

$$p_1/p_2 = 1 + (p_1 - p_2)/p_2 = 1 + \varepsilon$$

with $\varepsilon \ll 1$ — the standard incompressible Bernoulli equation.

این نتیجه به واسطه فرض سیال غیر لزج بدست آمده، اما در واقعیت لزجت تاثیر مهمی بر این مسئله خواهد داشت

isentropic flow $p/\rho^k = C$ $\rightarrow$ $\rho = p^{1/k}C^{-1/k}$

$$C^{1/k} = p_1^{1/k}/\rho_1 \text{ or } C^{1/k} = p_2^{1/k}/\rho_2$$

برای دو نقطه در روی یک خط جریان

$$C^{1/k}\int_{p1}^{p2} p^{-1/k}\,dp = C^{1/k}\left(\frac{k}{k-1}\right)\left[p_2^{(k-1)/k} - p_1^{(k-1)/k}\right] = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2}$$

for compressible, isentropic, steady flow of a perfect gas

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

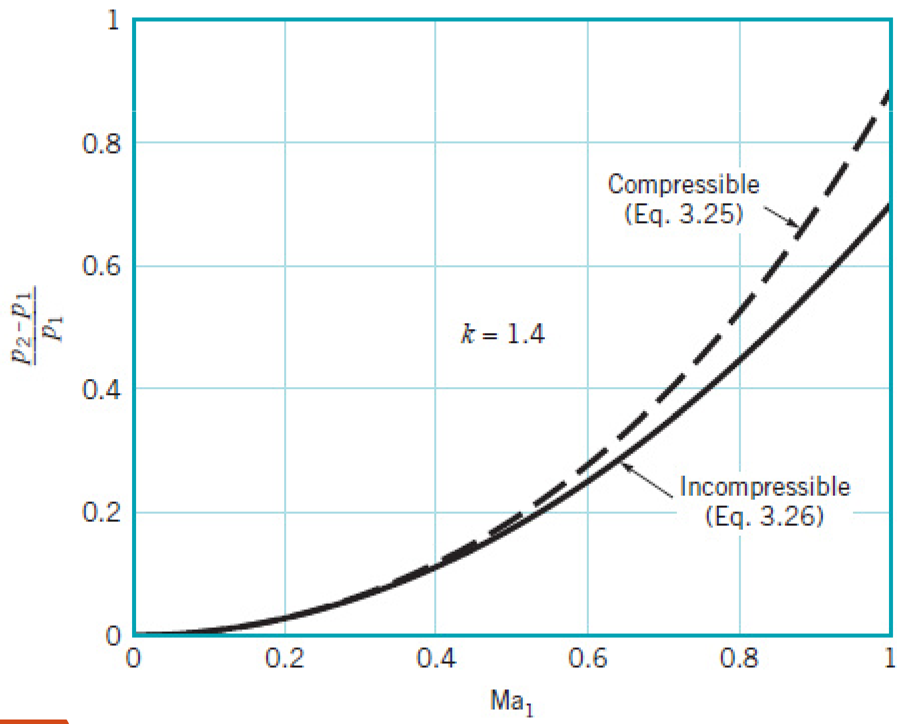
the stagnation point $$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \left[\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{k/k-1} - 1\right]$$ (compressible)

(2) the stagnation

Mach number $\Rightarrow \mathrm{Ma}_1 = V_1/c_1$

$z_1 = z_2,\ V_2 = 0$ the speed of sound, $c_1 = \sqrt{kRT_1}$

the incompressible
$$\left.\begin{aligned} \rho V_1^2/2 + p_1 &= p_2 \\ p_1 &= \rho RT_1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{p_2 - p_1}{p_1} &= \frac{V_1^2}{2RT_1} \\ \mathrm{Ma}_1 &= V_1/\sqrt{kRT_1} \end{aligned}\right\} \quad \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{k\mathrm{Ma}_1^2}{2}$$



نکته: برای عدد ماخ کوچکتر از ۰/۳، نتایج سیال تراکم ناپذیر با سیال تراکم پذیر تقریبا یکسان است . لذا برای گازها با عدد ماخ کوچکتر از ۰/۳ فرض تراکم ناپذیری صحیح است.

مثال: برای یک هواپیمای نظامی با سرعت ۰/۸ ماخ در ارتفاع ۱۰ کیلومتری مقدار فشار سکون در نوک هواپیما را بدست آورید.

From Tables

$$p_1 = 26.5 \text{ kPa (abs)} \qquad k = 1.4$$

$$T_1 = -49.9\ ^\circ\text{C}, \quad \rho = 0.414 \text{ kg/m}^3$$

incompressible flow $\dfrac{p_2 - p_1}{p_1} = \dfrac{k\text{Ma}_1^2}{2} = 1.4\dfrac{(0.82)^2}{2} = 0.471$ ➡ $p_2 - p_1 = 0.471(26.5 \text{ kPa}) = 12.5 \text{ kPa}$

if we assume isentropic flow

compressible

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \left\{\left[1 + \frac{(1.4-1)}{2}(0.82)^2\right]^{1.4/(1.4-1)} - 1\right\} = 0.555$$

$$p_2 - p_1 = 0.555(26.5 \text{ kPa}) = 14.7 \text{ kPa}$$

اختلاف تقریبا برابر با ۱۵٪

Note that if the airplane were flying at Mach 0.30

incompressible flow $p_2 - p_1 = 1.670 \text{ kPa}$

compressible flow $p_2 - p_1 = 1.707 \text{ kPa}$

اختلاف تقریبا برابر با ۲٪

شرایط غیر دایم

along a streamline $V = V(s, t)$ → $a_s = \partial V/\partial t + V\partial V/\partial s$

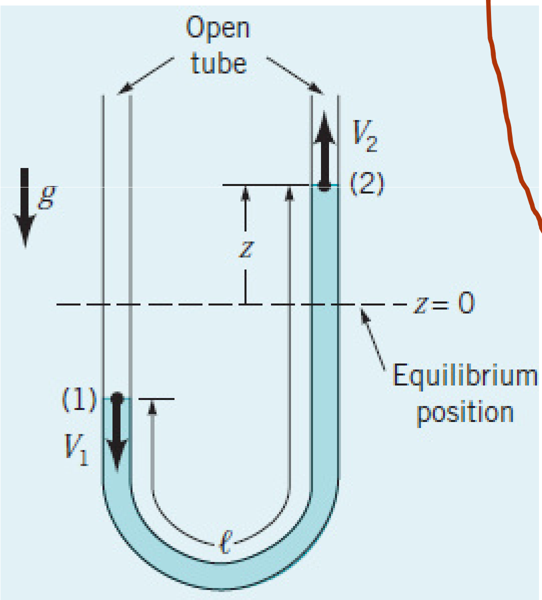
$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} ds + dp + \frac{1}{2}\rho d(V^2) + \gamma\, dz = 0 \qquad \text{(along a streamline)}$$

با استفاده از انتگرال گیری →

$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = \rho \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds + p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 \qquad \text{(along a streamline)}}$$

Valid for unsteady, incompressible, inviscid flow

مثال: شکل مقابل یک مانومتر U شکل را در شرایط اندازه گیری نوسانی نشان می دهد. فرکانس نوسان را بدست آورید.



$z_2 = z$, then $z_1 = -z$.

$V_1 = V_2 = V$, at any instant in time

$p_1 = p_2 = 0$

ℓ is the total length of the liquid column

$$\gamma(-z) = \rho\ell \frac{dV}{dt} + \gamma z$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{dV}{dt}\int_{s_1}^{s_2} ds = \ell \frac{dV}{dt}$$

$V = dz/dt$ and $\gamma = \rho g$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2g}{\ell} z = 0 \rightarrow z(t) = C_1 \sin(\sqrt{2g/\ell}\; t) + C_2 \cos(\sqrt{2g/\ell}\; t) \rightarrow \omega = \sqrt{2g/\ell}$$

The values of the constants C_1 and C_2 depend on the initial state (velocity and position) of the liquid at $t = 0$.

خلاصه روابط فصل

Streamwise and normal acceleration	$a_s = V\dfrac{\partial V}{\partial s}, \qquad a_n = \dfrac{V^2}{\mathcal{R}}$	**(3.1)**
Force balance along a streamline for steady inviscid flow	$\displaystyle\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = C$ (along a streamline)	**(3.6)**
The Bernoulli equation	$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z =$ constant along streamline	**(3.7)**
Pressure gradient normal to streamline for inviscid flow in absence of gravity	$\dfrac{\partial p}{\partial n} = -\dfrac{\rho V^2}{\mathcal{R}}$	**(3.10b)**
Force balance normal to a streamline for steady, inviscid, incompressible flow	$\displaystyle p + \rho\int \frac{V^2}{\mathcal{R}}\,dn + \gamma z =$ constant across the streamline	**(3.12)**
Velocity measurement for a Pitot-static tube	$V = \sqrt{2\,(p_3 - p_4)/\rho}$	**(3.16)**
Free jet	$V = \sqrt{2\,\dfrac{\gamma h}{\rho}} = \sqrt{2gh}$	**(3.18)**
Continuity equation	$A_1V_1 = A_2V_2$, or $Q_1 = Q_2$	**(3.19)**
Flow meter equation	$Q = A_2\sqrt{\dfrac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}$	**(3.20)**
Sluice gate equation	$Q = z_2 b\sqrt{\dfrac{2g(z_1 - z_2)}{1 - (z_2/z_1)^2}}$	**(3.21)**
Total head	$\dfrac{p}{\gamma} + \dfrac{V^2}{2g} + z =$ constant on a streamline $= H$	**(3.22)**