تحلیل مسایل با استفاده از حجم کنترل

The amount of mass in a system is constant. $\Rightarrow$

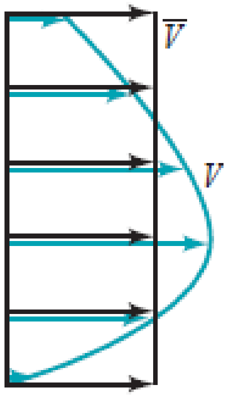
$$\frac{DM_{\text{sys}}}{Dt} = 0 \qquad M_{\text{sys}} = \int_{\text{sys}} \rho \, d\forall$$

$$B = \text{mass and } b = 1 \qquad \frac{DB_{\text{sys}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho b \, d\forall + \int_{\text{cs}} \rho b \, \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA \Rightarrow \cancelto{0}{\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \rho \, d\forall} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho \, d\forall + \int_{\text{cs}} \rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho \, d\forall + \underbrace{\int_{\text{cs}} \rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA}_{\sum \dot{m}_{\text{out}} - \sum \dot{m}_{\text{in}}} = 0}$$

دبی جرمی عبوری از یک سطح حجم کنترل A برابر است با:

$$\boxed{\dot{m} = \rho Q = \rho A V}$$



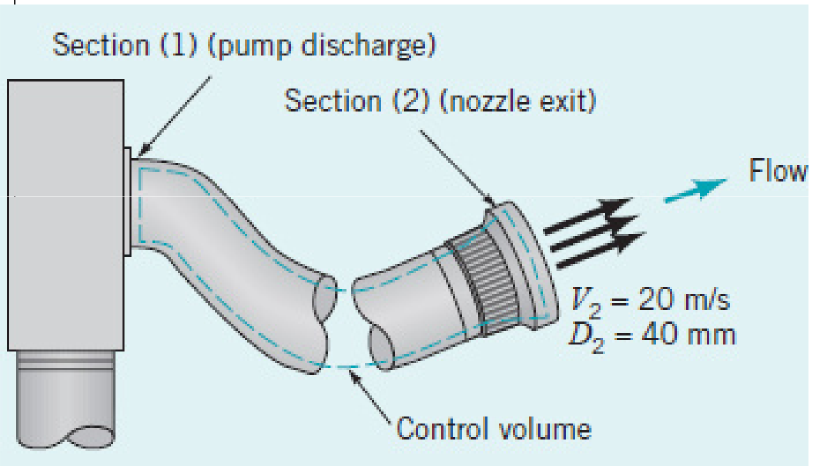
$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA \Rightarrow \rho A \overline{V} = \int_A \rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA \Rightarrow \overline{V} = \frac{\int_A \rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA}{\rho A} = V$$

مثال: در صورتی که سرعت خروجی از نازل یک شیر آتش نشانی خانگی برابر ۲۰ متر بر ثانیه باشد.، میزان دبی مورد نیازتوسط پمپ چند است؟

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\, d\forall + \int_{cs}\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 0$$

0 (flow is steady)

$$\rho_2 A_2 V_2 - \rho_1 A_1 V_1 = 0$$



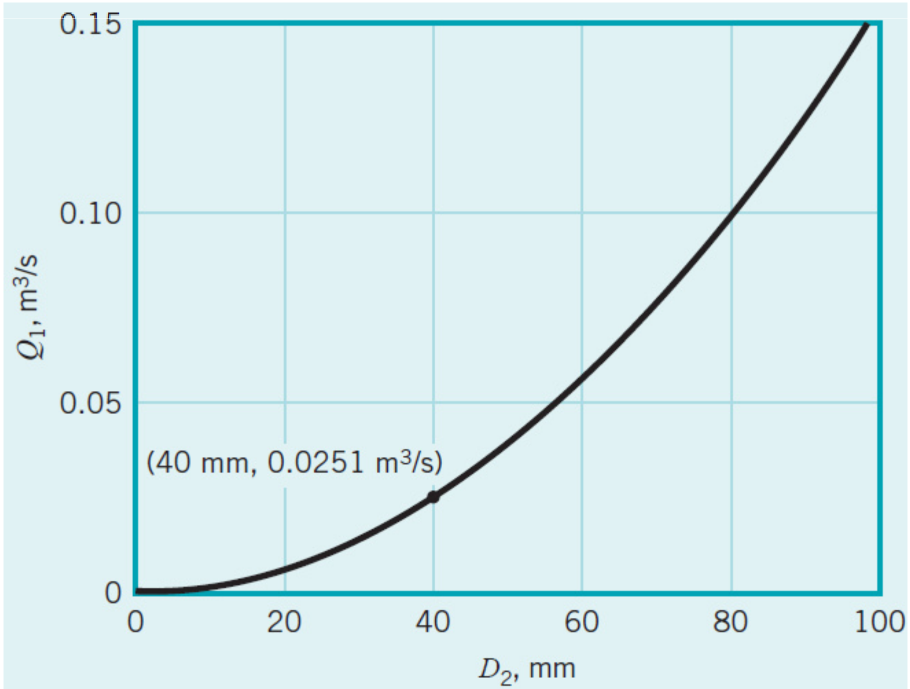
$$\dot m = \rho A V$$

$$\dot m_1 = \dot m_2 \Rightarrow \rho_2 Q_2 = \rho_1 Q_1$$

$$\rho_2 = \rho_1$$

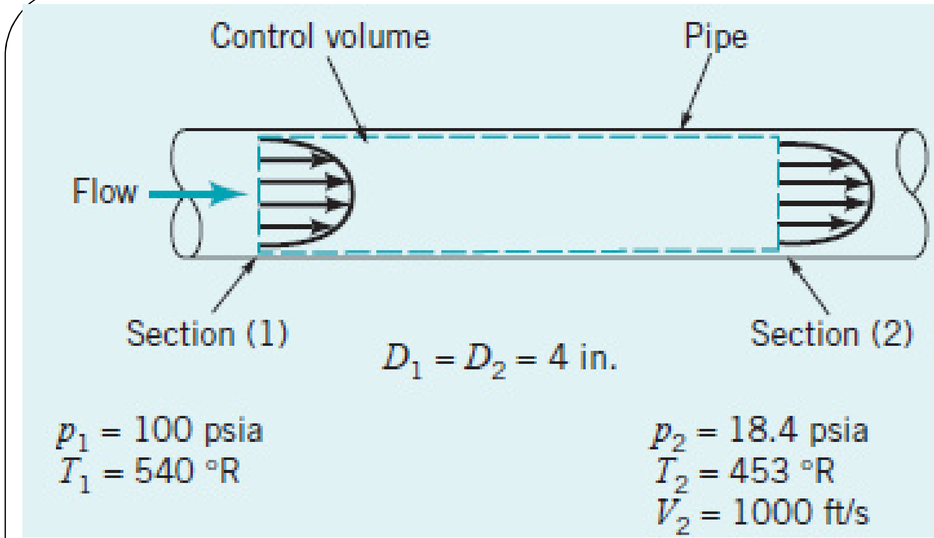
$$Q_2 = Q_1$$

$$Q_1 = Q_2 = V_2 A_2 = V_2 \frac{\pi}{4} D_2^2 = (20\ \text{m/s})\ \frac{\pi}{4}\left(\frac{40\ \text{mm}}{1000\ \text{mm/m}}\right)^2 = 0.0251\ \text{m}^3/\text{s}$$



By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: در جریان دایم هوا در داخل یک لوله که دارای فشار و دمای یکسان نیست، سرعت متوسط در مقطع ۲ برابر ft/s ۱۰۰۰ می باشد. سرعت متوسط در مقطع ۱ را بدست آورید.



بقاء جرم

$$\cancelto{0\ \text{(flow is steady)}}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho\, d\forall} + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 0$$

$$\int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{m}_2 - \dot{m}_1 = 0 \rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho_1 A_1 \overline{V}_1 = \rho_2 A_2 \overline{V}_2$$

$$A_1 = A_2$$

$$\overline{V}_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\overline{V}_2$$

$$\overline{V}_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\overline{V}_2$$

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$\overline{V}_1 = \frac{p_2 T_1 \overline{V}_2}{p_1 T_2}$$

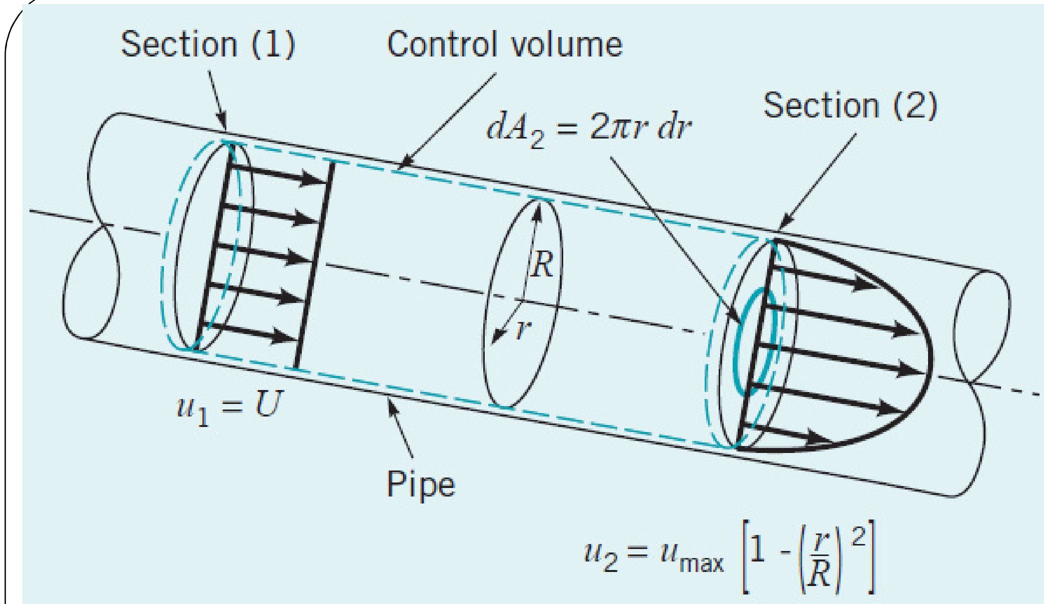
$$= \frac{(18.4 \text{ psia})(540\ °\text{R})(1000 \text{ ft/s})}{(100 \text{ psia})(453\ °\text{R})} = 219 \text{ ft/s}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: در جریان تراکم ناپذیر و آرام، سیال آب در یک لوله مستقیم با توزیع یکنواخت وارد شده و در راستای لوله دارای پروفیل توسعه یافته می شود.

الف) ارتباط میان سرعت ماکزیمم در پروفیل توسعه یافته و سرعت یکنواخت ورودی چگونه است؟

ب) ارتباط میان سرعت متوسط در مقطع ۲ و سرعت ماکزیمم در این مقطع چگونه است؟

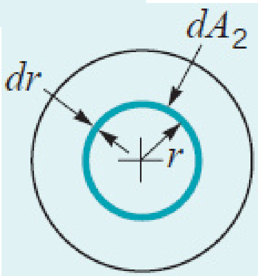


$$\cancelto{0 \text{ (flow is steady)}}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{cv}} \rho \, d\mathcal{V}} + \int_{\mathrm{cs}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0$$

section (1), the velocity is uniform with $V_1 = U$

$$\int_{(1)} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = -\rho_1 A_1 U$$

$$dA_2 = 2\pi r\, dr$$



$$\int_{(2)} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \rho_2 \int_0^R u_2 2\pi r\, dr$$

incompressible, $\rho_1 = \rho_2$

$$\rho_2 \int_0^R u_2 2\pi r\, dr - \rho_1 A_1 U = 0$$

$$2\pi u_{\max} \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r\, dr - A_1 U = 0$$

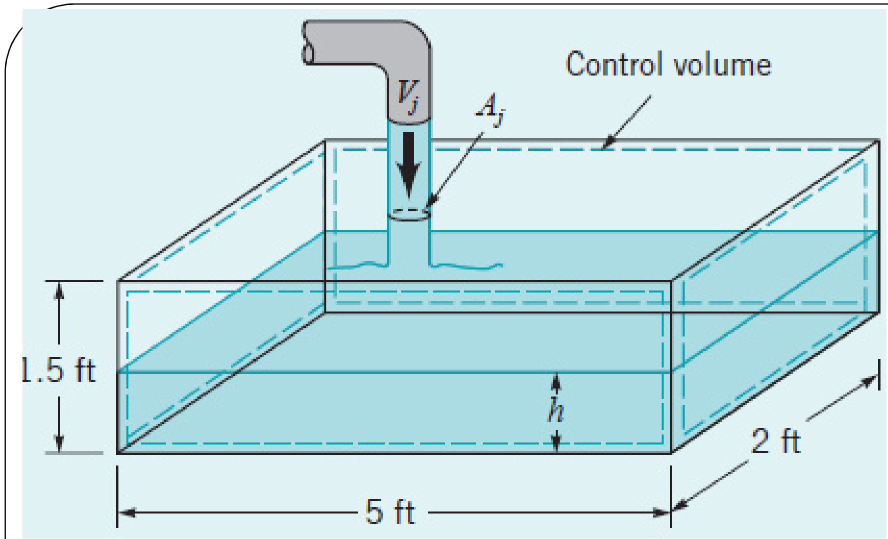
$$2\pi u_{\max} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right)_0^R - \pi R^2 U = 0$$

$$u_{\max} = 2U$$

$$\overline{V} = \frac{\int_A \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA}{\rho A} = V \Rightarrow \overline{V}_2 = \frac{u_{\max}}{2}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال:یک منبع توسط یک شیر آب پر می شود. دبی شیر آب ۹ گالن در دقیقه می باشد. تغییرات ارتفاع مخزن بر اساس اینچ بر دقیقه بدست آورید.



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{air}\\ \text{volume}}} \rho_{\text{air}}\, d\mathcal{V}_{\text{air}} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{water}\\ \text{volume}}} \rho_{\text{water}}\, d\mathcal{V}_{\text{water}} - \dot{m}_{\text{water}} + \dot{m}_{\text{air}} = 0$$

$$dm = \rho\, d\mathcal{V}$$

اگر از تبخیر آب صرفنظر گردد نتیجه می گردد که:

for air $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\substack{\text{air}\\ \text{volume}}} \rho_{\text{air}}\, d\mathcal{V}_{\text{air}} + \dot{m}_{\text{air}} = 0$

for water

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{water}\\ \text{volume}}} \rho_{\text{water}}\, d\mathcal{V}_{\text{water}} = \dot{m}_{\text{water}}$$

$$\int_{\substack{\text{water}\\ \text{volume}}} \rho_{\text{water}}\, d\mathcal{V}_{\text{water}} = \rho_{\text{water}}\left[h(2\text{ ft})(5\text{ ft}) + (1.5\text{ ft} - h)A_j\right]$$

$$\rho_{\text{water}}\,(10\text{ ft}^2 - A_j)\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{m}_{\text{water}}$$

$$\dot{m} = \rho Q,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q_{\text{water}}}{(10\text{ ft}^2 - A_j)}$$

For $A_j \ll 10\text{ ft}^2$ we can conclude that $\dfrac{\partial h}{\partial t} = \dfrac{Q_{\text{water}}}{(10\text{ ft}^2)}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(9\text{ gal/min})(12\text{ in./ft})}{(7.48\text{ gal/ft}^3)(10\text{ ft}^2)} = 1.44\text{ in./min}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho \, d\forall$$ برای شرایط دایم، مقدار این انتگرال برابر صفر است $\Rightarrow$ $\sum \dot{m}_{\text{out}} - \sum \dot{m}_{\text{in}} = 0$

incompressible $\Rightarrow$ $\sum Q_{\text{out}} - \sum Q_{\text{in}} = 0$

When the flow is uniformly distributed $\dot{m} = \rho A V$

velocity is nonuniformly distributed $\dot{m} = \rho A \overline{V}$

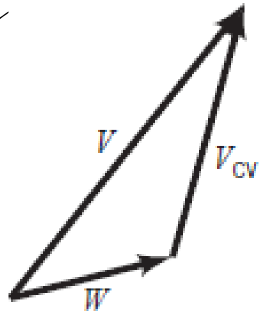
For steady flow $\dot{m} = \rho_1 A_1 \overline{V}_1 = \rho_2 A_2 \overline{V}_2$

for incompressible flow, $Q = A_1 \overline{V}_1 = A_2 \overline{V}_2$

For steady flow involving more than one stream $\sum \dot{m}_{\text{in}} = \sum \dot{m}_{\text{out}}$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

حجم کنترل متحرک با ابعاد ثابت



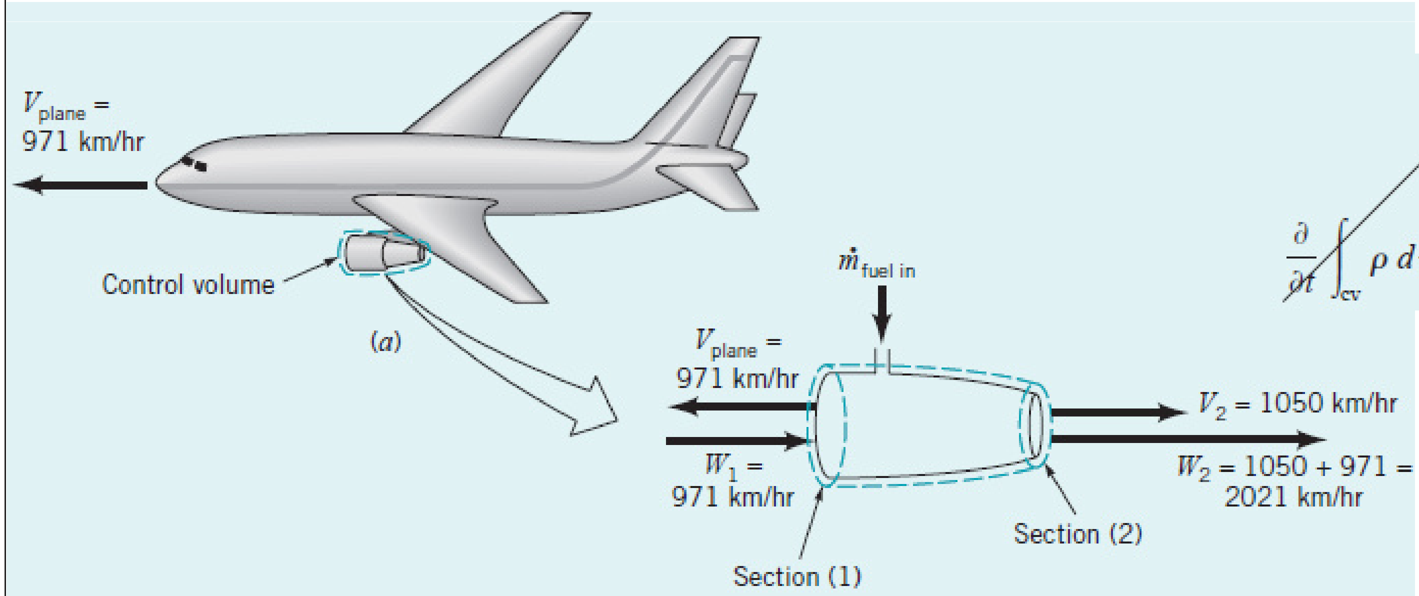
$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{V}_{cv}$$

- $\mathbf{V}$, is the fluid velocity
- $\mathbf{V}_{cv}$, is the velocity of the control volume
- $\mathbf{W}$, is relative velocity

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \, d\forall + \int_{cs} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \, d\forall + \int_{cs} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0$$

مثال: یک هواپیما با سرعت ۹۷۱ کیلومتر در ساعت در حال حرکت است. هوا با دانسیته $0.736\ \mathrm{kg/m^3}$ وارد ورودی موتور جت با مقطع ۰/۸ متر مربع می شود. یک ناظر ایستاده سرعت دود خروجی را ۱۰۵۰ کیلومتر در ساعت می بیند. سطح مقطع خروجی موتور ۰/۵۵۸ متر مربع و دانسیته دود $0.515\ \mathrm{kg/m^3}$ است.

دبی سوخت ورودی چند $\mathrm{kg/hr}$ است؟



0 (flow relative to moving control volume is considered steady on a time-average basis)

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \, d\forall} + \int_{cs} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0$$

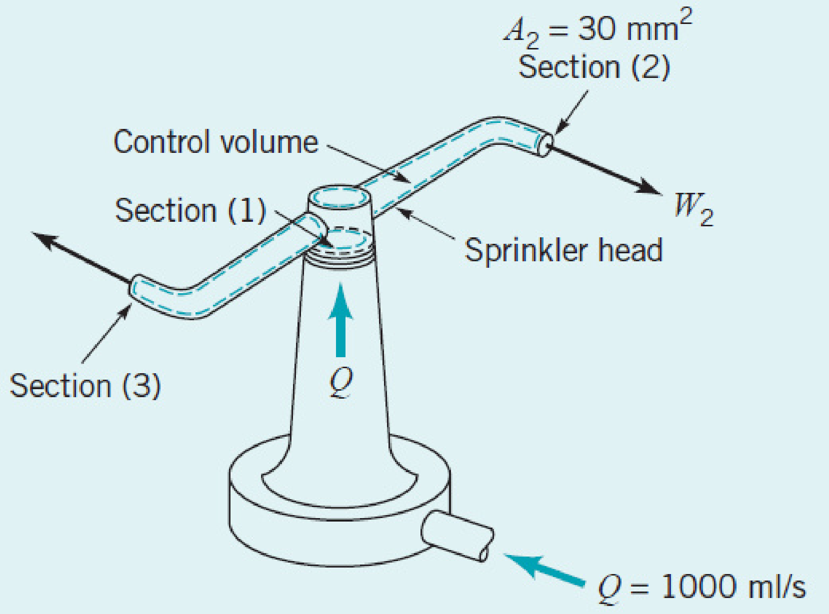
$$-\dot{m}_{\substack{\text{fuel}\\ \text{in}}} - \rho_1 A_1 W_1 + \rho_2 A_2 W_2 = 0$$

$$\dot{m}_{\substack{\text{fuel}\\ \text{in}}} = \rho_2 A_2 W_2 - \rho_1 A_1 W_1$$

$$V_2 = W_2 + V_{plane}$$

$$W_2 = V_2 - V_{plane} = 1050\ \text{km/hr} - (-971\ \text{km/hr}) = 2021\ \text{km/hr}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



$$\dot{m}_{\substack{\text{fuel}\\ \text{in}}} = (0.515\ \text{kg/m}^3)(0.558\ \text{m}^2)(2021\ \text{km/hr})(1000\ \text{m/km})$$
$$- (0.736\ \text{kg/m}^3)(0.80\ \text{m}^2)(971\ \text{km/hr})(1000\ \text{m/km})$$
$$= (580{,}800 - 571{,}700)\ \text{kg/hr}$$
$$\dot{m}_{\substack{\text{fuel}\\ \text{in}}} = 9100\ \text{kg/hr} \qquad \textbf{(Ans)}$$

مثال: یک آب پاش ماشینی در شرایط دایم ۱۰۰۰ میلی لیتر در ثانیه آب را پاشش می نماید. اگر سطح مقطع هر نازل ۳۰ میلی متر مربع باشد، سرعت از نازل را برای شرایط ذیل بدست آورید:

۱- نازل آب پاش ساکن باشد.

۲- نازل آب پاش با سرعت rpm ۶۰۰ بچرخد.

۳- نازل آب پاش از دور ۰ تا rpm ۶۰۰ شتاب بگیرد

0 flow is steady or the control volume is filled with an incompressible fluid

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho \, d\forall + \int_{\text{cs}} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0$$

$$A_2W_2 + A_3W_3 - A_1W_1 = 0$$

$$Q = A_1W_1,\ A_2 = A_3, \text{ and } W_2 = W_3$$

$$W_2 = \frac{(1000\ \text{ml/s})(0.001\ \text{m}^3/\text{liter})(10^6\ \text{mm}^2/\text{m}^2)}{(1000\ \text{ml/liter})(2)(30\ \text{mm}^2)}$$
$$= 16.7\ \text{m/s}$$

$$\sum \rho_{\text{out}} A_{\text{out}} W_{\text{out}} - \sum \rho_{\text{in}} A_{\text{in}} W_{\text{in}} = 0$$

$$\rho_2 A_2 W_2 + \rho_3 A_3 W_3 - \rho_1 A_1 W_1 = 0$$

incompressible flow with $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$

The value of W_2 is independent of the speed of rotation

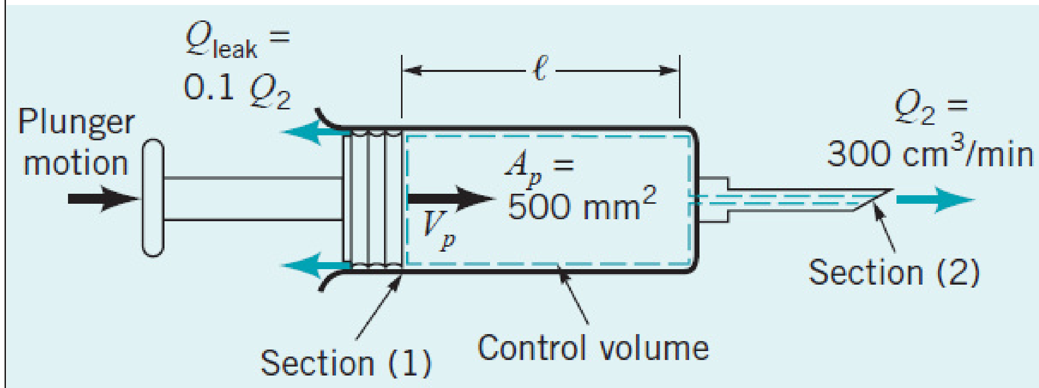
when viewed from a stationary reference $\quad V_2 = W_2 - U \quad U = \omega R$

نکته: از نگاه ناظر ساکن، تغییر دور کاملا در سرعت سیال خروجی از نازل موثر خواهد بود

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \, d\forall + \int_{cs} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0$$

حجم کنترل تغییر پذیر

در چنین شرایطی حجم کنترل و سطح آن با زمان تغییر می نمایند. نکته مهم در این مسایل، دقت در انتخاب سرعت برای حجم کنترل و دبی های ورودی و خروجی است.



مثال: برای مایه کوبی گاو از یک سرنگ مانند شکل مقابل استفاده می گردد. نیرو به سطح $۵۰۰ mm^2$ وارد شده و سیال با دبی ثابت ۳۰۰ سانتی متر مکعب در دقیقه از سرنگ خارج می شود. مقدار دبی نشتی برابر ۰/۱ دبی خروجی از سرنگ است. برای این شرایط سرعت پیستون سرنگ چند است؟

$$A_1 = A_p$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \, d\forall + \dot{m}_2 + \rho Q_{leak} = 0$$

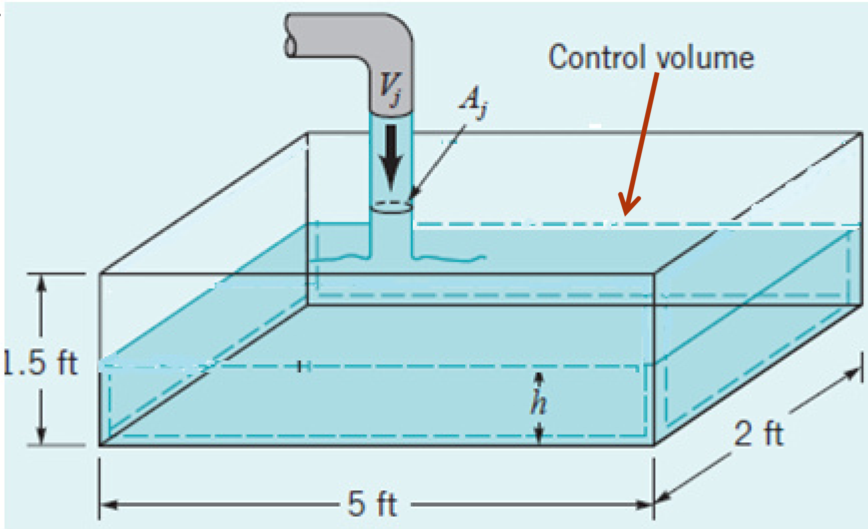
$$\int_{cv} \rho \, d\forall = \rho(\ell A_1 + \underbrace{\forall_{needle}}_{\text{ثابت}}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \, d\forall = \rho A_1 \frac{\partial \ell}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \ell}{\partial t} = V_p$$

$$\left.\begin{array}{r} -\rho A_1 V_p + \dot{m}_2 + \rho Q_{leak} = 0 \\ \dot{m}_2 = \rho Q_2 \end{array}\right\} -\rho A_1 V_p + \rho Q_2 + \rho Q_{leak} = 0 \Rightarrow V_p = \frac{Q_2 + Q_{leak}}{A_1} = \frac{1.1 Q_2}{A_1}$$

$$V_p = \frac{(1.1)(300\ cm^3/min)}{(500\ mm^2)}\left(\frac{1000\ mm^3}{cm^3}\right) = 660\ mm/min$$

مثال:یک منبع توسط یک شیر آب پر می شود. دبی شیر آب ۹ گالن در دقیقه می باشد. تغییرات ارتفاع مخزن بر اساس اینچ بر دقیقه بدست آورید. با استفاده از روش حجم کنترل تغییر پذیر حل شود.



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{water}\\\text{volume}}} \rho \, d\forall + \int_{cs} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{water}\\\text{volume}}} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}[\rho h(2 \text{ ft})(5 \text{ ft})] = \rho\,(10 \text{ ft}^2)\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\int_{cs} \rho \, \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = -\rho\left(V_j + \frac{\partial h}{\partial t}\right)A_j$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V_j A_j}{(10 \text{ ft}^2 - A_j)} = \frac{Q_{\text{water}}}{(10 \text{ ft}^2 - A_j)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{9(\text{gal/min})(12 \text{ in./ft})}{(7.48 \text{ gal/ft}^3)(10 \text{ ft}^2)} = 1.44 \text{ in./min}$$

$$\text{for } A_j \ll 10 \text{ ft}^2$$

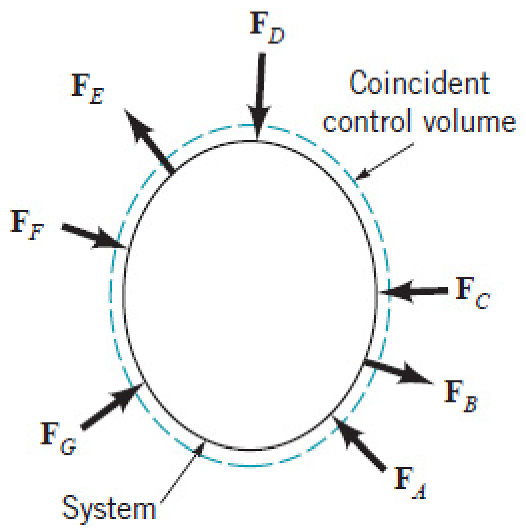
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

قانون دوم نیوتن- بقاء اندازه حرکت

مجموع نیروهای وارده بر سیستم= نرخ تغییر مومنتم خطی برای یک سیستم

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \mathbf{V}\rho\, d\forall = \sum \mathbf{F}_{\text{sys}}$$

$$\frac{DB_{\text{sys}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho b\, d\forall + \int_{\text{cs}} \rho b\, \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$



$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \mathbf{V}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \mathbf{V}\rho\, d\forall + \int_{\text{cs}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

نرخ مومنتم جریان عبوری از سطح حجم کنترل+ نرخ تغییر مومنتم خطی حجم کنترل= نرخ تغییر مومنتم خطی سیستم

$$\sum \mathbf{F}_{\text{sys}} = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contents of the}\\ \text{coincident control volume}}}$$

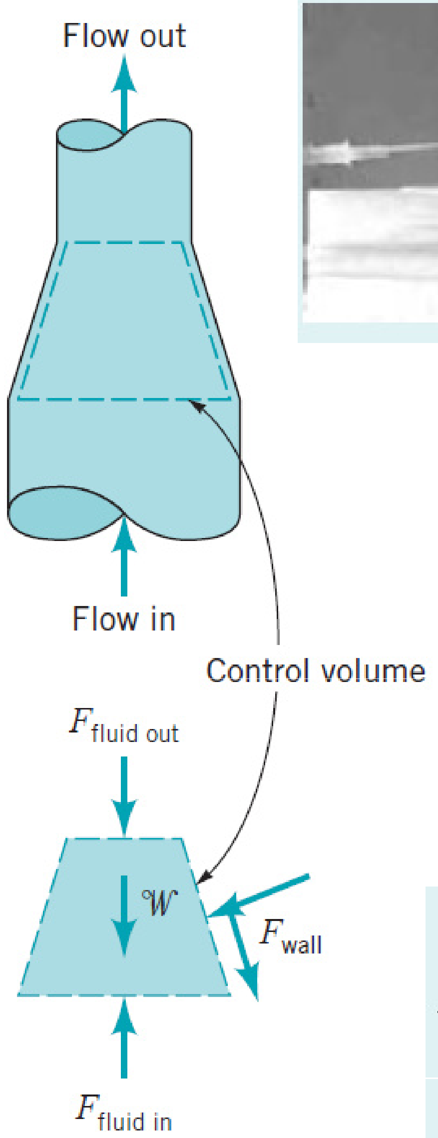
at an instant of time

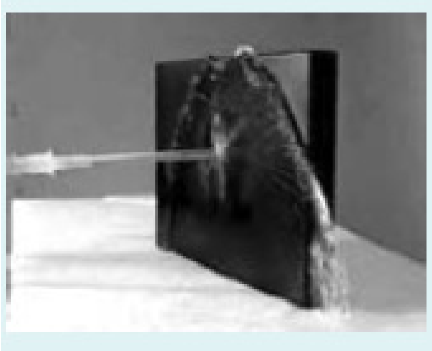
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \mathbf{V}\rho\, d\forall + \int_{\text{cs}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contents of the}\\ \text{control volume}}}}$$

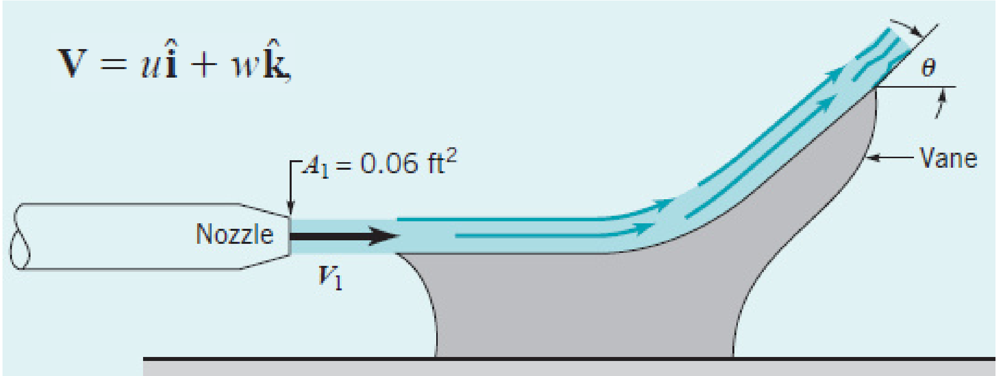
linear momentum equation.

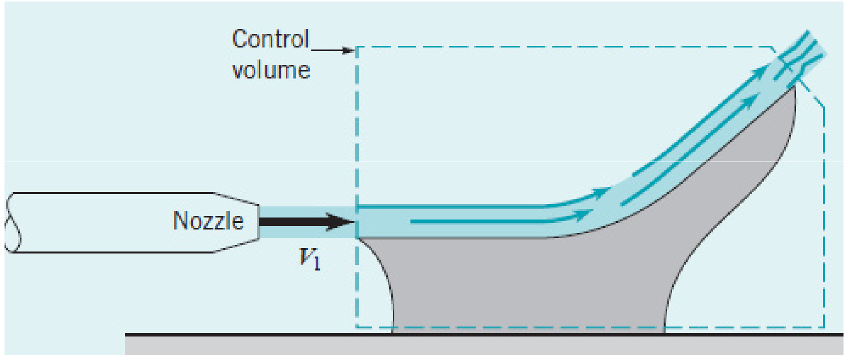
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

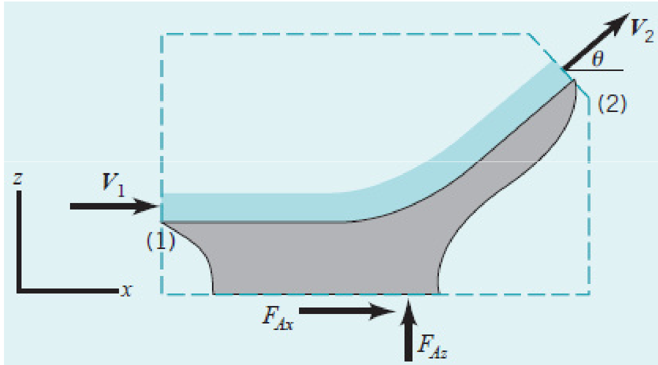
مثال: مقدار نیروی لازم برای اینکه یک تیغه در اثر برخورد با جت سیال ساکن بماند را بدست آورید. از اثر لزجت صرفنظر گردد.











$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_{cv} u\,\rho\, d\mathcal{V}}_{0\ \text{(flow is steady)}} + \int_{cs} u\,\rho\,\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = \sum F_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_{cv} w\,\rho\, d\mathcal{V}}_{0\ \text{(flow is steady)}} + \int_{cs} w\,\rho\,\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = \sum F_z$$

$$u_2\rho A_2 V_2 - u_1\rho A_1 V_1 = \sum F_x$$

$$w_2\rho A_2 V_2 - w_1\rho A_1 V_1 = \sum F_z$$

از رابطه برنولی می توان نتیجه گرفت: $V_1 = V_2 = 10\ \text{ft/s}$

at section (1)

$u_1 = V_1,\ w_1 = 0$

at section (2)

$u_2 = V_1\cos\theta,\ w_2 = V_1\sin\theta$

$V_1 \cos\theta \, \rho A_2 V_1 - V_1 \rho A_1 V_1 = F_{Ax}$

incompressible flow $A_1 V_1 = A_2 V_2$, or $A_1 = A_2$ since $V_1 = V_2$.

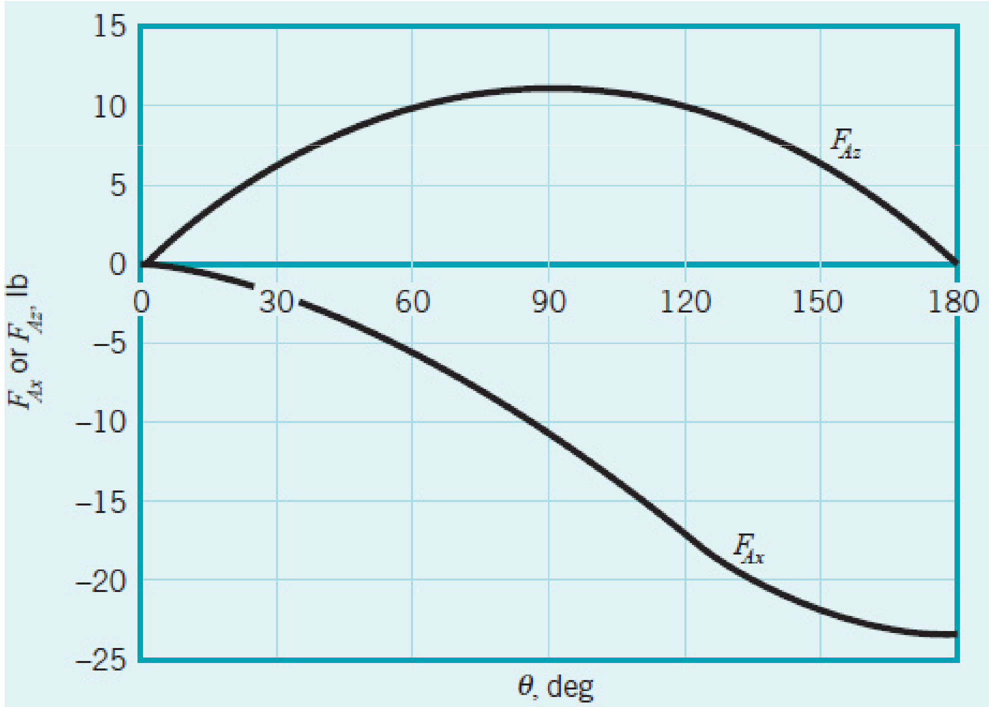
$V_1 \sin\theta \, \rho A_2 V_1 - 0 \, \rho A_1 V_1 = F_{Az}$

$$F_{Ax} = -\rho A_1 V_1^2 + \rho A_1 V_1^2 \cos\theta = -\rho A_1 V_1^2 (1 - \cos\theta)$$

$$F_{Az} = \rho A_1 V_1^2 \sin\theta$$

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= -(1.94 \text{ slugs/ft}^3)(0.06 \text{ ft}^2)(10 \text{ ft/s})^2(1 - \cos\theta) \\ &= -11.64(1 - \cos\theta) \text{ slugs} \cdot \text{ft/s}^2 \\ &= -11.64(1 - \cos\theta) \text{ lb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Az} &= (1.94 \text{ slugs/ft}^3)(0.06 \text{ ft}^2)(10 \text{ ft/s})^2 \sin\theta \\ &= 11.64 \sin\theta \text{ lb} \end{aligned}$$

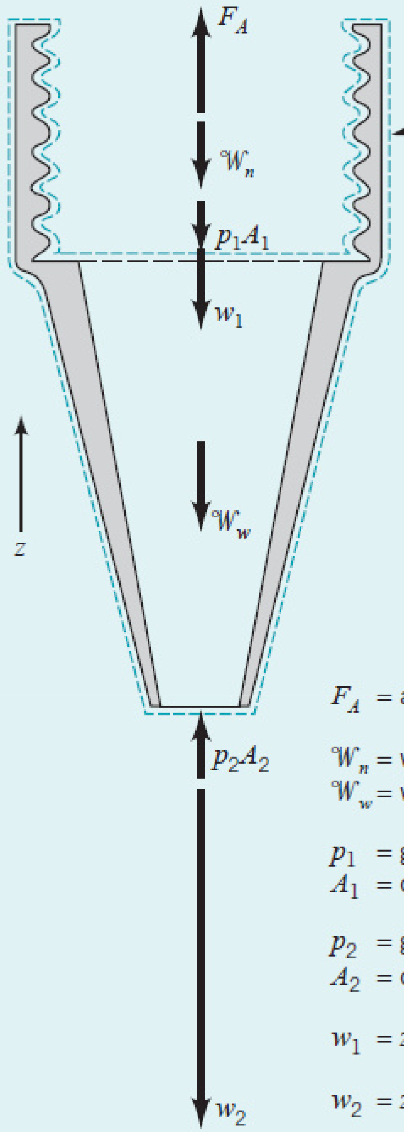


$$\left.\begin{aligned} F_{Ax} &= -\rho A_1 V_1^2 (1 - \cos\theta) \\ \dot{m} &= \rho A_1 V_1 \end{aligned}\right\} \quad F_{Ax} = -\dot{m} V_1 (1 - \cos\theta)$$

$$F_{Az} = \dot{m} V_1 \sin\theta$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: در انتهای یک شیر آزمایشگاهی یک نازل متصل شده است. دبی نازل ۰/۶ lit/s و قطر ورودی و خروجی نازل به ترتیب ۱۶ و ۵ میلی متر است. وزن نازل ۰/۶ کیلوگرم و فشار ورودی ۴۶۴ kPa است. نیروی لازم برای نگهداری نازل در تکیه گاهش چند است؟



F_A = anchoring force that holds nozzle in place
$\mathcal{W}_n$ = weight of nozzle
$\mathcal{W}_w$ = weight of water contained in the nozzle
p_1 = gage pressure at section (1)
A_1 = cross section area at section (1)
p_2 = gage pressure at section (2)
A_2 = cross section area at section (2)
w_1 = z direction velocity at control volume entrance
w_2 = z direction velocity at control volume exit

$$\cancelto{0 \text{ (flow is steady)}}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} w\rho \, d\forall} + \int_{\text{cs}} w\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = F_A - \mathcal{W}_n - p_1A_1 - \mathcal{W}_w + p_2A_2$$

$$(-\dot{m}_1)(-w_1) + \dot{m}_2(-w_2) = F_A - \mathcal{W}_n - p_1A_1 - \mathcal{W}_w + p_2A_2$$

$\dot{m} = \rho A V$ is the mass flowrate

$$F_A = \dot{m}_1 w_1 - \dot{m}_2 w_2 + \mathcal{W}_n + p_1A_1 + \mathcal{W}_w - p_2A_2$$

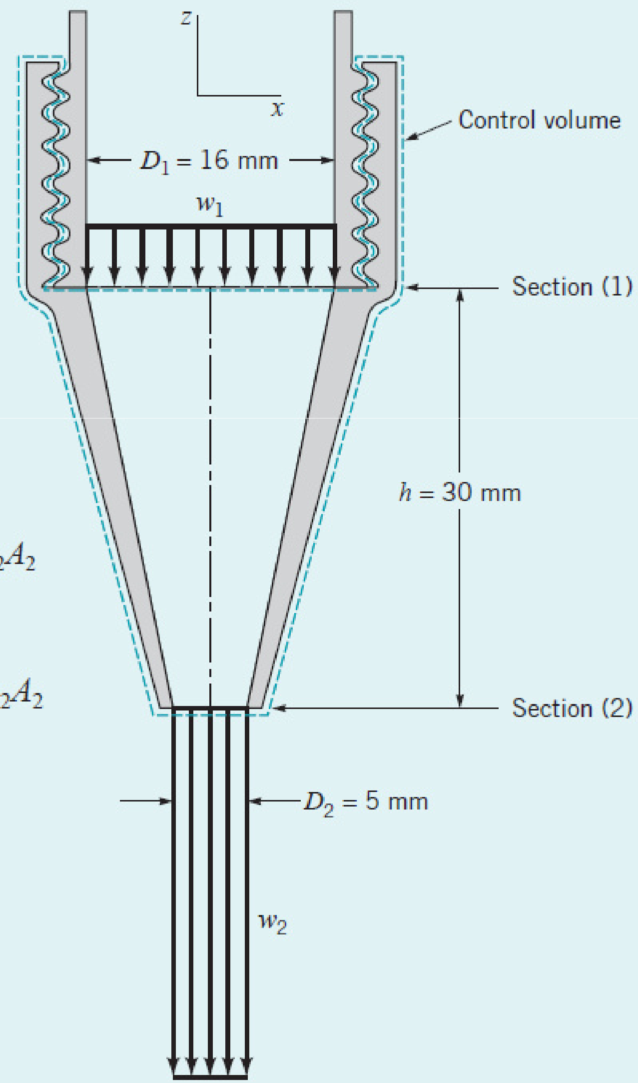
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

$$F_A = \dot{m}(w_1 - w_2) + \mathcal{W}_n + p_1A_1 + \mathcal{W}_w - p_2A_2$$

$$\dot{m} = \rho w_1 A_1 = \rho Q$$

$$= (999 \text{ kg/m}^3)(0.6 \text{ liter/s})(10^{-3} \text{ m}^3/\text{liter})$$
$$= 0.599 \text{ kg/s}$$

$$w_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi(D_1^2/4)}$$



$$w_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi(D_1^2/4)}$$
$$= \frac{(0.6 \text{ liter/s})(10^{-3} \text{ m}^3/\text{liter})}{\pi(16 \text{ mm})^2/4(1000^2 \text{ mm}^2/\text{m}^2)} = 2.98 \text{ m/s}$$

$$w_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\pi(D_2^2/4)}$$
$$= \frac{(0.6 \text{ liter/s})(10^{-3} \text{ m}^3/\text{liter})}{\pi(5 \text{ mm})^2/4(1000^2 \text{ mm}^2/\text{m}^2)} = 30.6 \text{ m/s}$$

$$\mathcal{W}_n = m_n g = (0.1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0.981 \text{ N}$$

$$\mathcal{W}_w = \rho \mathcal{V}_w g$$

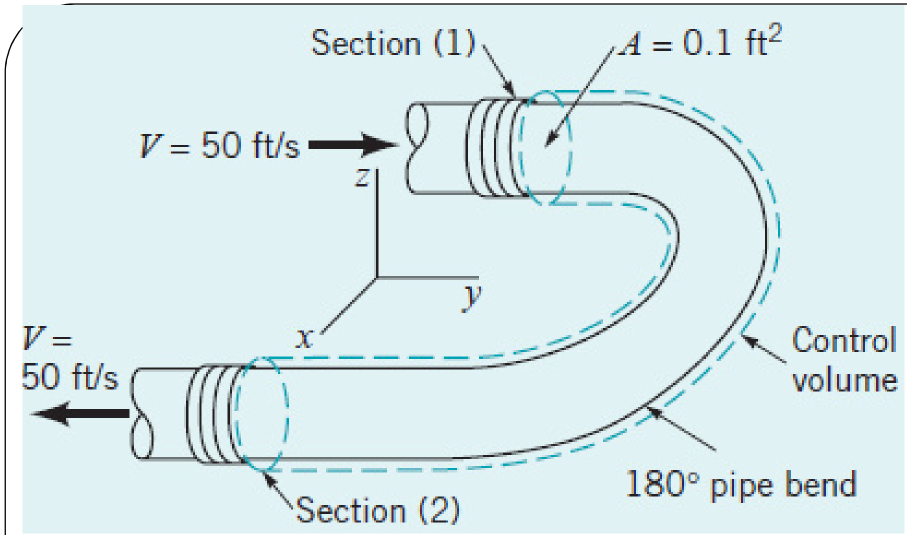
$$\mathcal{V}_w = \tfrac{1}{12}\pi h(D_1^2 + D_2^2 + D_1 D_2)$$
$$= \frac{1}{12}\pi \frac{(30 \text{ mm})}{(1000 \text{ mm/m})}$$
$$\times \left[\frac{(16 \text{ mm})^2 + (5 \text{ mm})^2 + (16 \text{ mm})(5 \text{ mm})}{(1000^2 \text{ mm}^2/\text{m}^2)}\right]$$
$$= 2.84 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

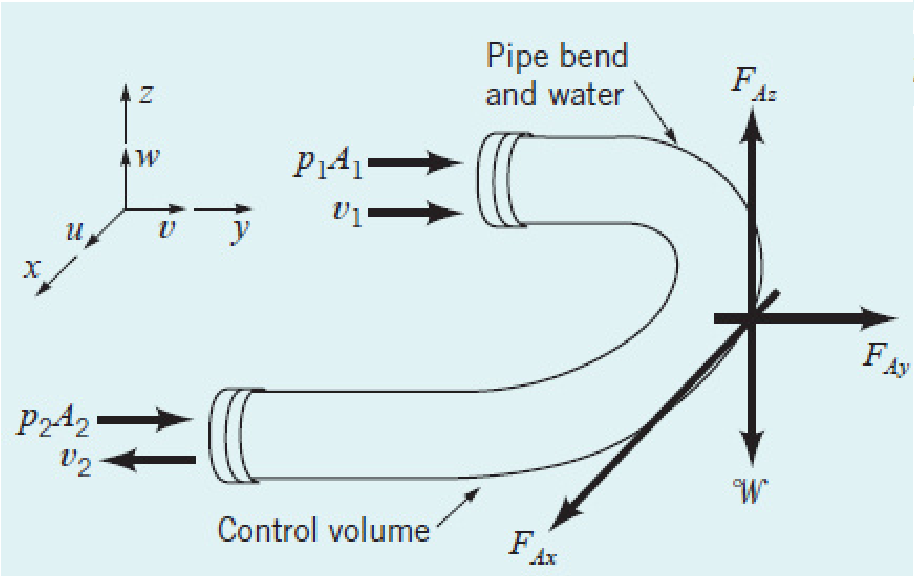
$$\mathcal{W}_w = (999 \text{ kg/m}^3)(2.84 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)$$
$$= 0.0278 \text{ N}$$

$$F_A = (0.599 \text{ kg/s})(2.98 \text{ m/s} - 30.6 \text{ m/s}) + 0.981 \text{ N}$$
$$+ (464 \text{ kPa})(1000 \text{ Pa/kPa}) \frac{\pi(16 \text{ mm})^2}{4(1000^2 \text{ mm}^2/\text{m}^2)}$$
$$+ 0.0278 \text{ N} - 0$$

$$F_A = -16.5 \text{ N} + 0.981 \text{ N} + 93.3 \text{ N} + 0.0278 \text{ N}$$
$$= 77.8 \text{ N}$$

مثال: جریان از داخل یک لوله خمیده افقی با سرعت ۵۰ ft/s و دارای سطح مقطع ثابت ۰/۱ ft^2 عبور می نماید. فشار مطلق در ورودی و خروجی به ترتیب برابر ۳۰ و ۲۴ psia می باشد. نیروی لازم برای نگهداری لوله در سطح افقی چند است؟





At sections (1) and (2), $u = 0$ at both cross sections $\Big\}\ F_{Ax} = 0$

For the y direction,

$$\int_{cs} v\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = F_{Ay} + p_1A_1 + p_2A_2$$

$$(+v_1)(-\dot{m}_1) + (-v_2)(+\dot{m}_2) = F_{Ay} + p_1A_1 + p_2A_2$$

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow -\dot{m}(v_1 + v_2) = F_{Ay} + p_1A_1 + p_2A_2$$

$$F_{Ay} = -\dot{m}(v_1 + v_2) - p_1A_1 - p_2A_2$$

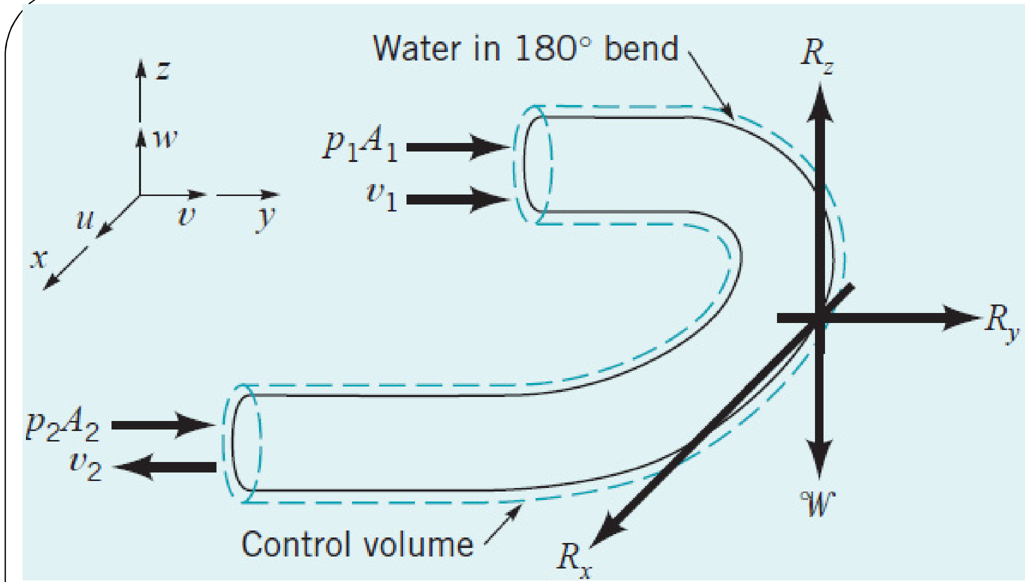
$$\dot{m} = \rho_1A_1v_1 = (1.94\text{ slugs/ft}^3)(0.1\text{ ft}^2)(50\text{ ft/s}) = 9.70\text{ slugs/s}$$

$$1\text{ lb} = 1\text{ slug}\cdot\text{ft/s}^2$$

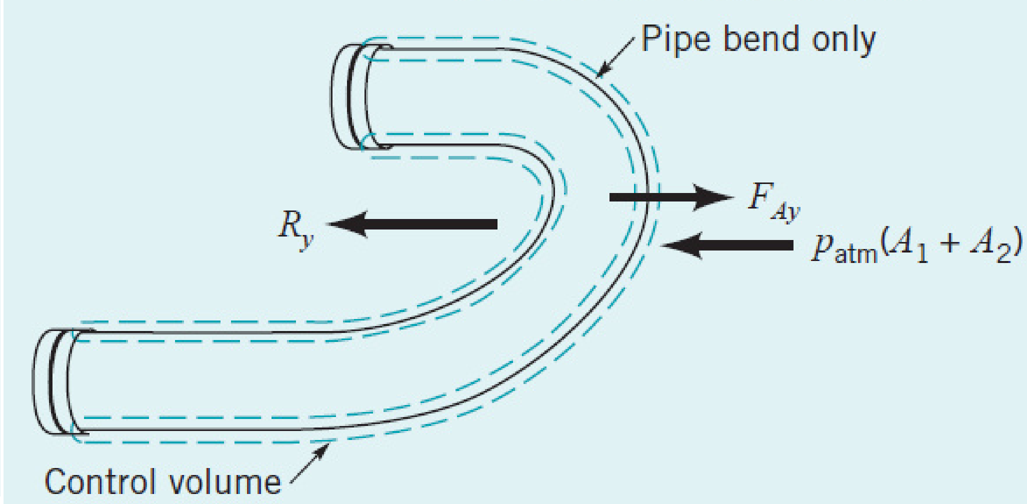
$$\begin{aligned}F_{Ay} = &-(9.70\text{ slugs/s})(50\text{ ft/s} + 50\text{ ft/s})\\ &-(30\text{ psia} - 14.7\text{ psia})(144\text{ in.}^2/\text{ft}^2)(0.1\text{ ft}^2)\\ &-(24\text{ psia} - 14.7\text{ psia})(144\text{ in.}^2/\text{ft}^2)(0.1\text{ ft}^2)\end{aligned}$$

$$F_{Ay} = -970\text{ lb} - 220\text{ lb} - 134\text{ lb} = -1324\text{ lb}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



(without the fluid inside it)



R نیروی موجود به واسطه خمیدگی به سیال داخل لوله

$$R_y = -\dot{m}(v_1 + v_2) - p_1A_1 - p_2A_2$$

p_1 and p_2 must be in terms of absolute pressure

$$\begin{aligned} R_y &= -(9.70 \text{ slugs/s})(50 \text{ ft/s} + 50 \text{ ft/s}) \\ &\quad - (30 \text{ psia})(144 \text{ in.}^2/\text{ft}^2)(0.1 \text{ ft}^2) \\ &\quad - (24 \text{ psia})(144 \text{ in.}^2/\text{ft}^2)(0.1 \text{ ft}^2) \\ &= -1748 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$F_{Ay} = R_y + p_{atm}(A_1 + A_2)$$

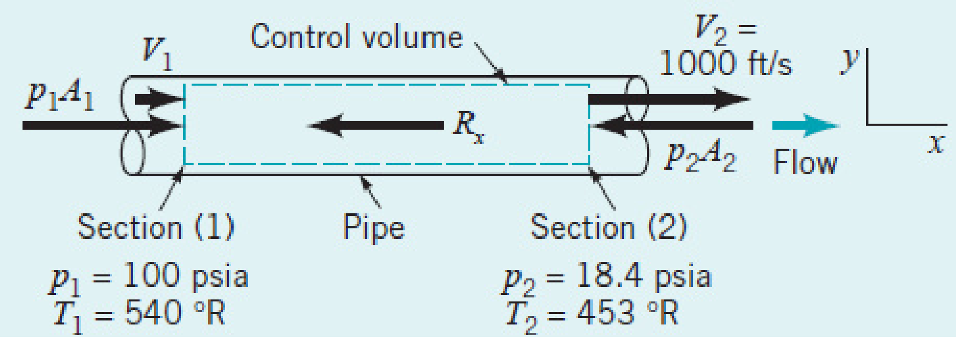
$$p_{atm} = 14.7 \text{ lb/in.}^2 (144 \text{ in.}^2/\text{ft}^2) = 2117 \text{ lb/ft}^2$$

$$\begin{aligned} F_{Ay} &= -1748 \text{ lb} + 2117 \text{ lb/ft}^2 (0.1 \text{ ft}^2 + 0.1 \text{ ft}^2) \\ &= -1324 \text{ lb} \end{aligned}$$

با توجه به چگونگی انتخاب حجم کنترل ، فشار محیط می تواند با تاثیر و یا بدون تاثیر باشد. در مثال فوق با احتساب حجم کنترل بر روی سطح لوله و بدون در نظر گرفتن سیال، اثر فشار محیط ظاهر می گردد

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: هوا در داخل یک لوله مستقیم به قطر ۴ in در جریان بوده و شرایط به گونه است که دما و فشار در هر مقطع ثابت و یکنواخت است. در صورتی که سرعت متوسط در مقطع ۲، ۱۰۰۰ft/s و در مقطع ۱، برابر ۲۱۹ft/s می باشد. مقدار نیروی اصطکاک وارد بر سطح داخلی لوله را محاسبه نمایید.



Air flows steadily

$$\int_{cs} u\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = -R_x + p_1A_1 - p_2A_2$$

$$(+u_1)(-\dot{m}_1) + (+u_2)(+\dot{m}_2) = -R_x + p_1A_1 - p_2A_2$$

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\dot{m}(u_2 - u_1) = -R_x + A_2(p_1 - p_2) \Rightarrow R_x = A_2(p_1 - p_2) - \dot{m}(u_2 - u_1)$$

$$\left.\begin{aligned}\rho_2 &= \frac{p_2}{RT_2}\\ A_2 &= \frac{\pi D_2^2}{4}\end{aligned}\right\} \quad \dot{m} = \left(\frac{p_2}{RT_2}\right)\left(\frac{\pi D_2^2}{4}\right)u_2$$

$$\mathrm{R} = \frac{1716(\mathrm{ft\cdot lb})/(\mathrm{slug\cdot {}^\circ R})}{32.174(\mathrm{lbm/slug})} = 53.3(\mathrm{ft\cdot lb})/(\mathrm{lbm\cdot {}^\circ R})$$

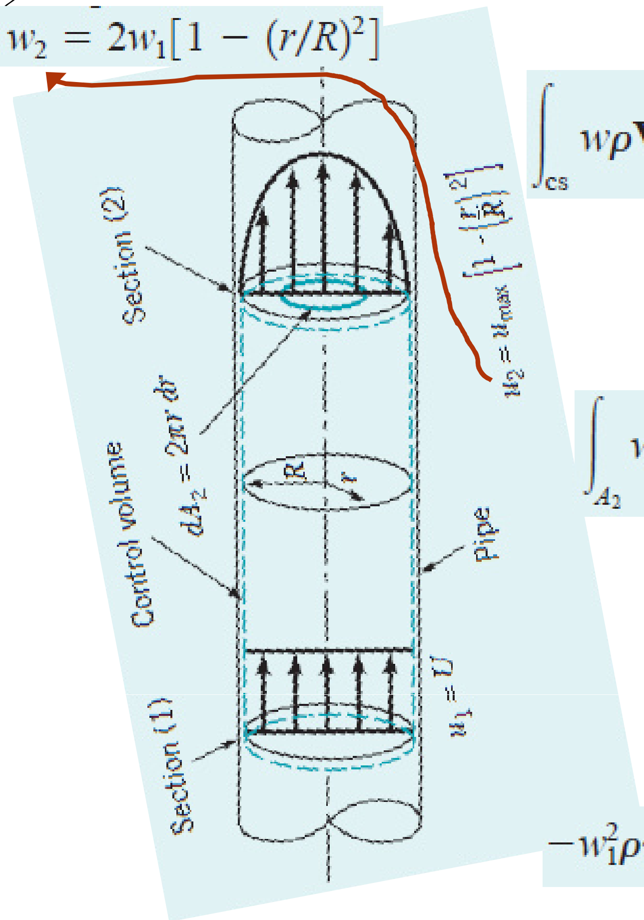
$$\dot{m} = \frac{(18.4\text{ psia})(144\text{ in.}^2/\text{ft}^2)}{[53.3(\text{ft}\cdot\text{lb})/(\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R})]\,(453\,{}^\circ\text{R})} \times \frac{\pi(4\text{ in.})^2}{4(144\text{ in.}^2/\text{ft}^2)}(1000\text{ ft/s}) = 9.57\text{ lbm/s}$$

$$\begin{aligned}R_x = {}& \frac{\pi(4\text{ in.})^2}{4}(100\text{ psia} - 18.4\text{ psia})\\ &- (9.57\text{ lbm})(1000\text{ ft/s} - 219\text{ ft/s})/\\ &\quad 32.174(\text{lbm}\cdot\text{ft})/(\text{lb}\cdot\text{s}^2)\\ = {}& 1025\text{ lb} - 232\text{ lb}\end{aligned}$$

$$R_x = 793\text{ lb}$$

مثال: برای یک لوله عمودی تغییرات فشار در بین نقطه ۱ و ۲ چگونه است؟

$w_2 = 2w_1[1 - (r/R)^2]$



$$\int_{cs} w\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = p_1A_1 - R_z - \mathcal{W} - p_2A_2$$

$$(+w_1)(-\dot{m}_1) + \int_{A_2} (+w_2)\rho(+w_2\, dA_2) = p_1A_1 - R_z - \mathcal{W} - p_2A_2$$

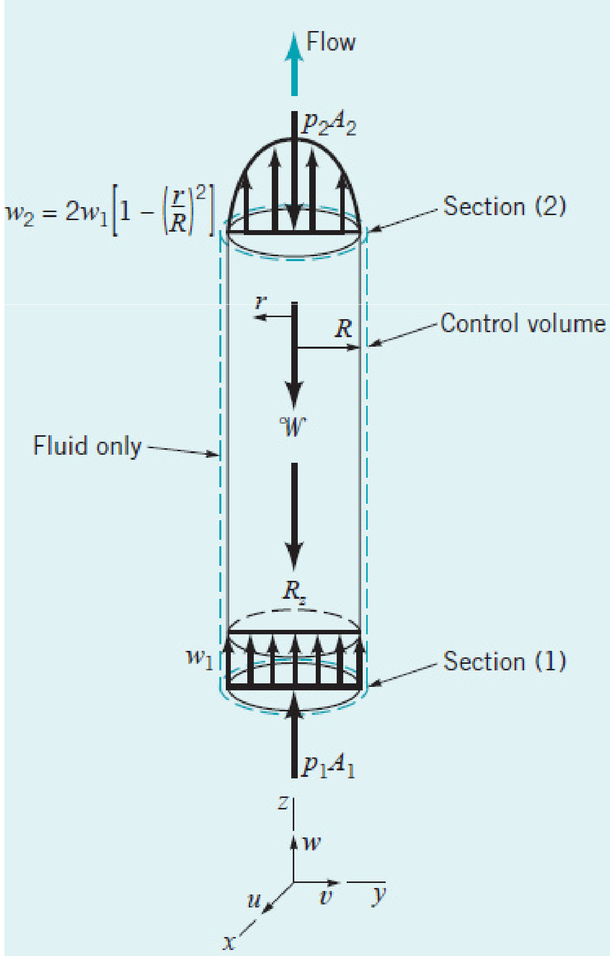
$$\int_{A_2} w_2\rho w_2\, dA_2 = \rho\int_0^R w_2^2\, 2\pi r\, dr$$

$$= 2\pi\rho\int_0^R (2w_1)^2\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2 r\, dr$$

$$\int_{A_2} w_2\rho w_2\, dA_2 = 4\pi\rho w_1^2\frac{R^2}{3}$$

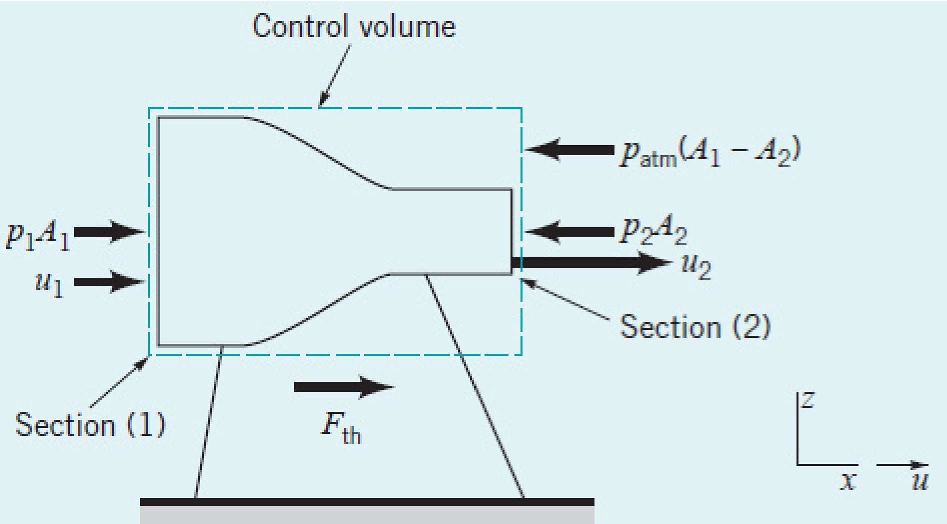
$$-w_1^2\rho\pi R^2 + \tfrac{4}{3}w_1^2\rho\pi R^2 = p_1A_1 - R_z - \mathcal{W} - p_2A_2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho w_1^2}{3} + \frac{R_z}{A_1} + \frac{\mathcal{W}}{A_1}$$



By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: یک سامانه محوری ایستاده برای آزمایش موتور جت طراحی شده است. سرعت ورودی ۲۰۰ متر بر ثانیه و سرعت خروجی ۵۰۰m/s، سطح مقطع ورودی ۱ m^2 و فشار استاتیک ورودی $-22.5\ \text{kPa} = 78.5\ \text{kPa (abs)}$ و دمای استاتیک ورودی ۲۶۸K و فشار خروجی $0\ \text{kPa} = 101\ \text{kPa (abs)}$ نیروی وارد بر سامانه را بدست آورید.



$$\int_{cs} u\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = p_1A_1 + F_{th} - p_2A_2 - p_{atm}(A_1 - A_2)$$

$$(+u_1)(-\dot{m}_1) + (+u_2)(+\dot{m}_2) = (p_1 - p_{atm})A_1 - (p_2 - p_{atm})A_2 + F_{th}$$

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \rho_1A_1u_1 = \dot{m}_2 = \rho_2A_2u_2$$

$$\dot{m}(u_2 - u_1) = p_1A_1 - p_2A_2 + F_{th}$$

$$F_{th} = -p_1A_1 + p_2A_2 + \dot{m}(u_2 - u_1)$$

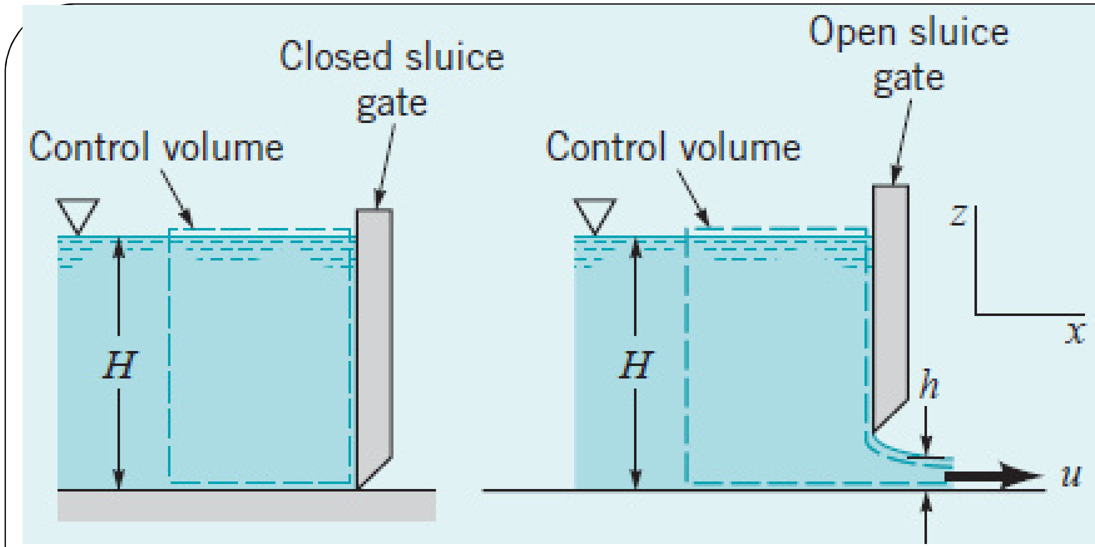
$\dot{m} = \rho_1A_1u_1$ we need ρ_1

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{(78.5\ \text{kPa})(1000\ \text{Pa/kPa})[1(\text{N/m}^2)/\text{Pa}]}{(286.9\ \text{J/kg}\cdot\text{K})(268\ \text{K})(1\ \text{N}\cdot\text{m/J})} = 1.02\ \text{kg/m}^3$$

$$\dot{m} = \rho_1A_1u_1 = (1.02\ \text{kg/m}^3)(1\ \text{m}^2)(200\ \text{m/s}) = 204\ \text{kg/s}$$

$$F_{th} = -(1\ \text{m}^2)(-22.5\ \text{kPa})(1000\ \text{Pa/kPa})[1(\text{N/m}^2)/\text{Pa}] + (204\ \text{kg/s})(500\ \text{m/s} - 200\ \text{m/s})[1\ \text{N/(kg}\cdot\text{m/s}^2)]$$

$$F_{th} = 22{,}500\ \text{N} + 61{,}200\ \text{N} = 83{,}700\ \text{N}$$



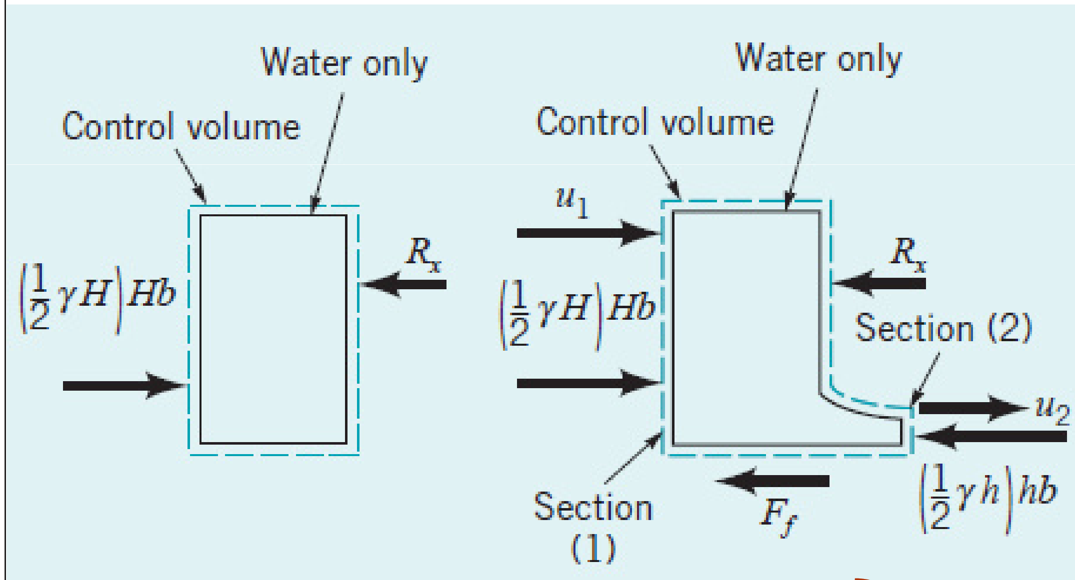
مثال: برای دریچه یک کانال با عرض b، مقدار نیروی وارد بر دریچه در کدام حالت در شرایط بسته و باز بزرگتر است؟

When the gate is closed.

$$\cancelto{0\ \text{(no flow)}}{\int_{cs} u\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - R_x \Rightarrow R_x = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b$$

When the gate is open

$$\int_{cs} u\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - R_x - \tfrac{1}{2}\gamma h^2 b - F_f$$



$$\int_{cs} u\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = (u_1)\rho(-u_1)Hb + (+u_2)\rho(+u_2)hb$$

$$-\rho u_1^2 Hb + \rho u_2^2 hb = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - R_x - \tfrac{1}{2}\gamma h^2 b - F_f$$

If $H \gg h \Rightarrow R_x = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - \tfrac{1}{2}\gamma h^2 b - F_f - \rho u_2^2 hb$

$$\dot{m} = \rho bHu_1 = \rho bhu_2$$

$$R_x = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - \tfrac{1}{2}\gamma h^2 b - F_f - \dot{m}(u_2 - u_1)$$

$$\left.\begin{array}{r} R_x = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - \tfrac{1}{2}\gamma h^2 b - F_f - \dot{m}(u_2 - u_1) \\ R_x = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b \end{array}\right\}$$

در شرایط بسته نیروی وارده بر در یچه بیشتر است. زیرا $u_2 > u_1$ می باشد

برای یک حجم کنترل با یک سرعت ثابت

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \mathbf{V}\rho\, d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \mathbf{V}\rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{cs}} \mathbf{V}\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{V}_{\text{cv}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \mathbf{V}\rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{cs}} \mathbf{V}\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contents of the}\\ \text{control volume}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} (\mathbf{W} + \mathbf{V}_{\text{cv}})\rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{cs}} (\mathbf{W} + \mathbf{V}_{\text{cv}})\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contents of the}\\ \text{control volume}}}$$

steady flow $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} (\mathbf{W} + \mathbf{V}_{\text{cv}})\rho\, d\mathcal{V} = 0 \Rightarrow \int_{\text{cs}} (\mathbf{W} + \mathbf{V}_{\text{cv}})\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_{\text{cs}} \mathbf{W}\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA + \mathbf{V}_{\text{cv}}\int_{\text{cs}} \rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$

For steady flow (on an instantaneous or time-average basis),

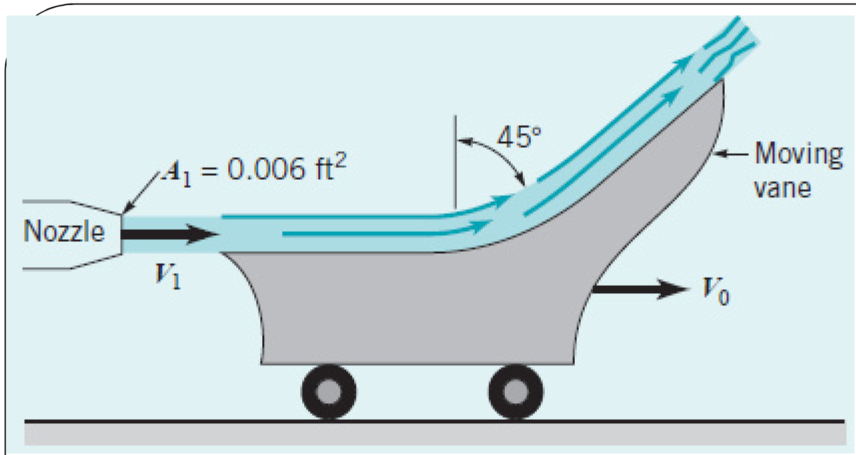
$$\cancel{\frac{DM_{\text{sys}}}{Dt}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{cs}} \rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \Rightarrow \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho\, d\mathcal{V}} + \int_{\text{cs}} \rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 0 \Rightarrow \int_{\text{cs}} \rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 0$$

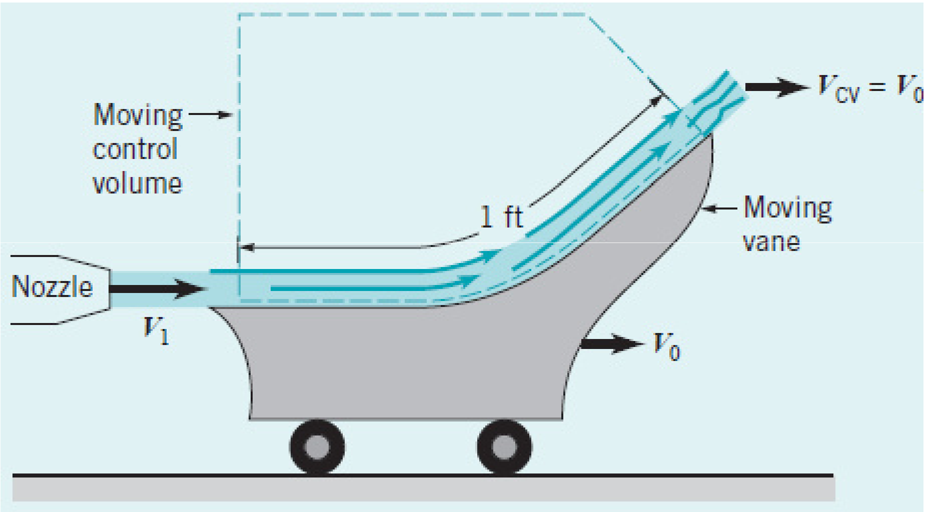
بقای جرم

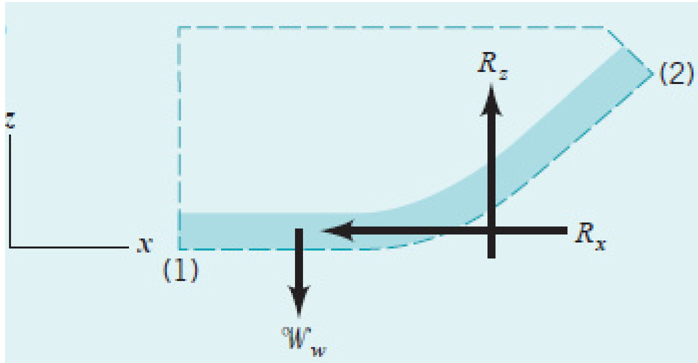
$$\boxed{\int_{\text{cs}} \mathbf{W}\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contents of the}\\ \text{control volume}}}}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: جت سیال با سرعت V_1 به یک پره چرخدار که با سرعت ثابت V0 حرکت می کند، برخورد می نماید. سیال با سرعت ۱۰۰ ft/s از پره خارج می گردد و سرعت پره نیز ۲۰ft/s است. اندازه و راستای نیروی وارده بر پره را بدست آورید.







$$\int_{cs} W_x \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = -R_x$$

$$(+W_1)(-\dot{m}_1) + (+W_2 \cos 45°)(+\dot{m}_2) = -R_x$$

$$\dot{m}_1 = \rho_1 W_1 A_1 \qquad \text{and} \qquad \dot{m}_2 = \rho_2 W_2 A_2.$$

from the Bernoulli equation

با صرفنظر کردن از اختلاف ارتفاع در پره

$$W_1 = W_2$$

$$\int_{cs} W_z \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = R_z - \mathcal{W}_w \Rightarrow (+W_2 \sin 45°)(+\dot{m}_2) = R_z - \mathcal{W}_w$$

$$W_1 = V_1 - V_0 = 100 \text{ ft/s} - 20 \text{ ft/s} = 80 \text{ ft/s} = W_2$$

$$\dot{m}_1 = \rho_1 W_1 A_1 = \rho_2 W_2 A_2 = \dot{m}_2$$

$$R_x = \rho W_1^2 A_1 (1 - \cos 45°)$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 1.94 \text{ slugs/ft}^3$$

$$R_x = (1.94 \text{ slugs/ft}^3)(80 \text{ ft/s})^2(0.006 \text{ ft}^2)(1 - \cos 45°) = 21.8 \text{ lb}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

$$R_z = \rho W_1^2 (\sin 45°) A_1 + \mathcal{W}_w$$

$$\mathcal{W}_w = \rho g A_1 \ell$$

$$\begin{aligned} R_z &= (1.94 \text{ slugs/ft}^3)(80 \text{ ft/s})^2 (\sin 45°)(0.006 \text{ ft}^2) \\ &\quad + (62.4 \text{ lb/ft}^3)(0.006 \text{ ft}^2)(1 \text{ ft}) \\ &= 52.6 \text{ lb} + 0.37 \text{ lb} = 53 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = [(21.8 \text{ lb})^2 + (53 \text{ lb})^2]^{1/2} = 57.3 \text{ lb}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{R_z}{R_x} = \tan^{-1} (53 \text{ lb}/21.8 \text{ lb}) = 67.6°$$

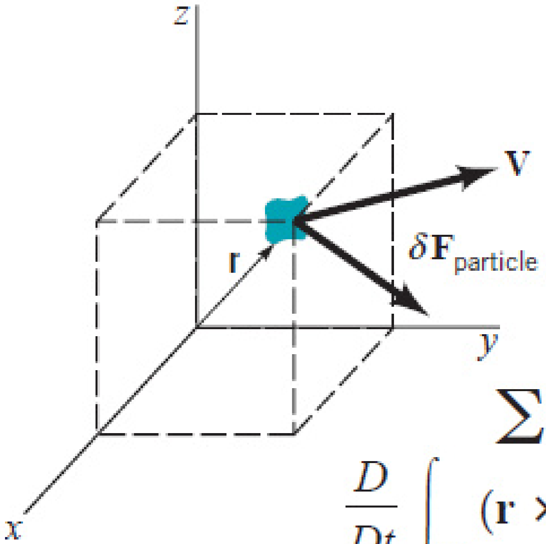
power this situation

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= R_x V_0 \\ &= \frac{(21.8 \text{ lb})(20 \text{ ft/s})}{550 (\text{ft} \cdot \text{lb})/(\text{hp} \cdot \text{s})} \\ &= 0.79 \text{ hp} \end{aligned}$$

همه این قدرت توسط اصطکاک مصرف می شود.

گشتاور اندازه حرکت

Newton's second law of motion to a particle of fluid yields



$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{V}\rho\,\delta\mathcal{V}) = \delta\mathbf{F}_{\text{particle}} \qquad \mathbf{r}\times\frac{D}{Dt}(\mathbf{V}\rho\,\delta\mathcal{V}) = \mathbf{r}\times\delta\mathbf{F}_{\text{particle}}$$

$$\frac{D}{Dt}[(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\,\delta\mathcal{V}] = \frac{D\mathbf{r}}{Dt}\times\mathbf{V}\rho\,\delta\mathcal{V} + \mathbf{r}\times\frac{D(\mathbf{V}\rho\,\delta\mathcal{V})}{Dt} \qquad \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}\times\mathbf{V} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{D}{Dt}[(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\,\delta\mathcal{V}] = \mathbf{r}\times\delta\mathbf{F}_{\text{particle}}$$

$$\sum\mathbf{r}\times\delta\mathbf{F}_{\text{particle}} = \sum(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_{\text{sys}}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\,d\mathcal{V} = \int_{\text{sys}}\frac{D}{Dt}[(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\,d\mathcal{V}]$$

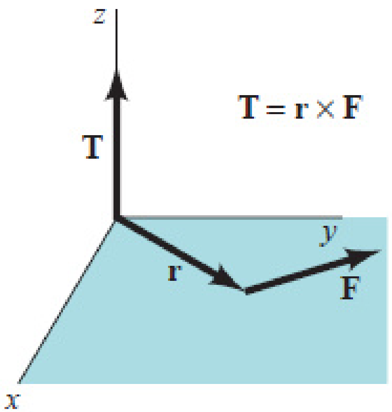
$$\int_{\text{sys}}\frac{D}{Dt}[(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\,d\mathcal{V}] = \sum(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_{\text{sys}}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\,d\mathcal{V} = \sum(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_{\text{sys}} \;\Rightarrow$$

مجموع گشتاور خارجی وارد بر سیستم= نرخ تغییرات گشتاور اندازه حرکت

torque, $\mathbf{T} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$

$$\sum(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_{\text{sys}} = \sum(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_{\text{cv}}$$



$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\,d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\,d\mathcal{V} + \int_{\text{cs}}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA$$

برآیند نرخ گشتاور اندازه حرکت موثر بر سطح حجم کنترل+ نرخ تغییر گشتاوراندازه حرکت حجم کنترل= نرخ تغییر گشتاور اندازه حرکت در سیستم

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\,d\mathcal{V} + \int_{\text{cs}}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = \sum(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_{\substack{\text{contents of the}\\ \text{control volume}}}}$$

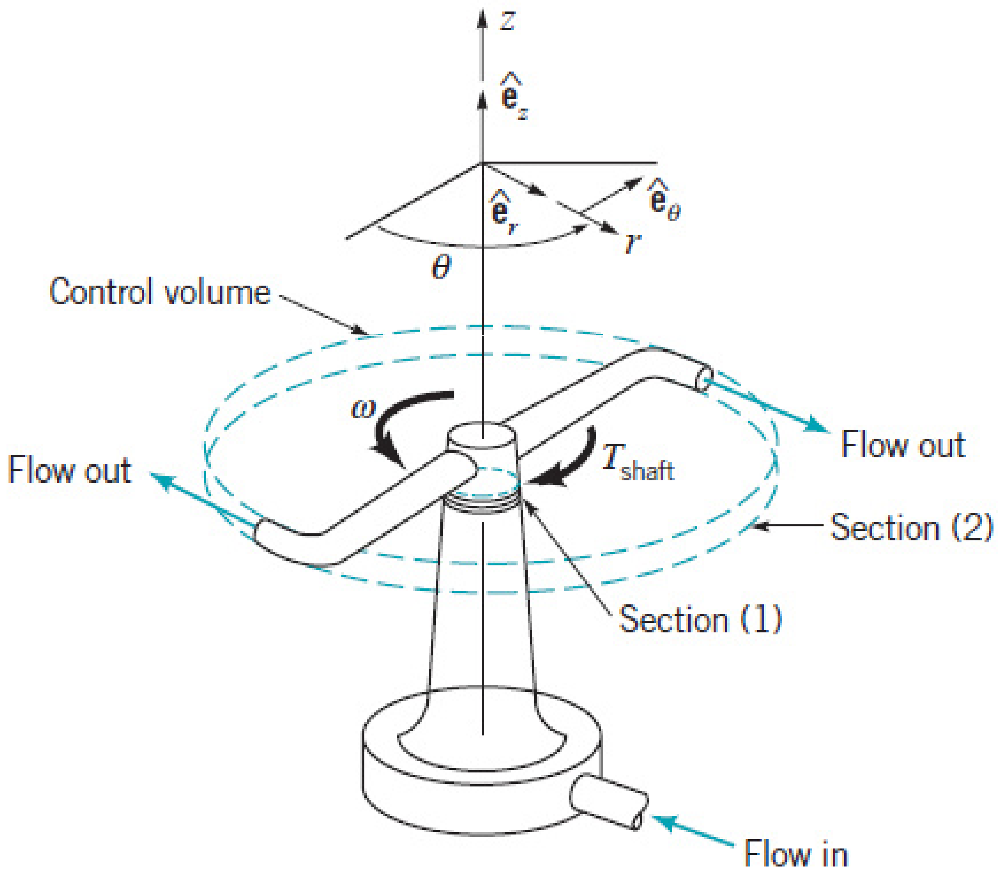
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

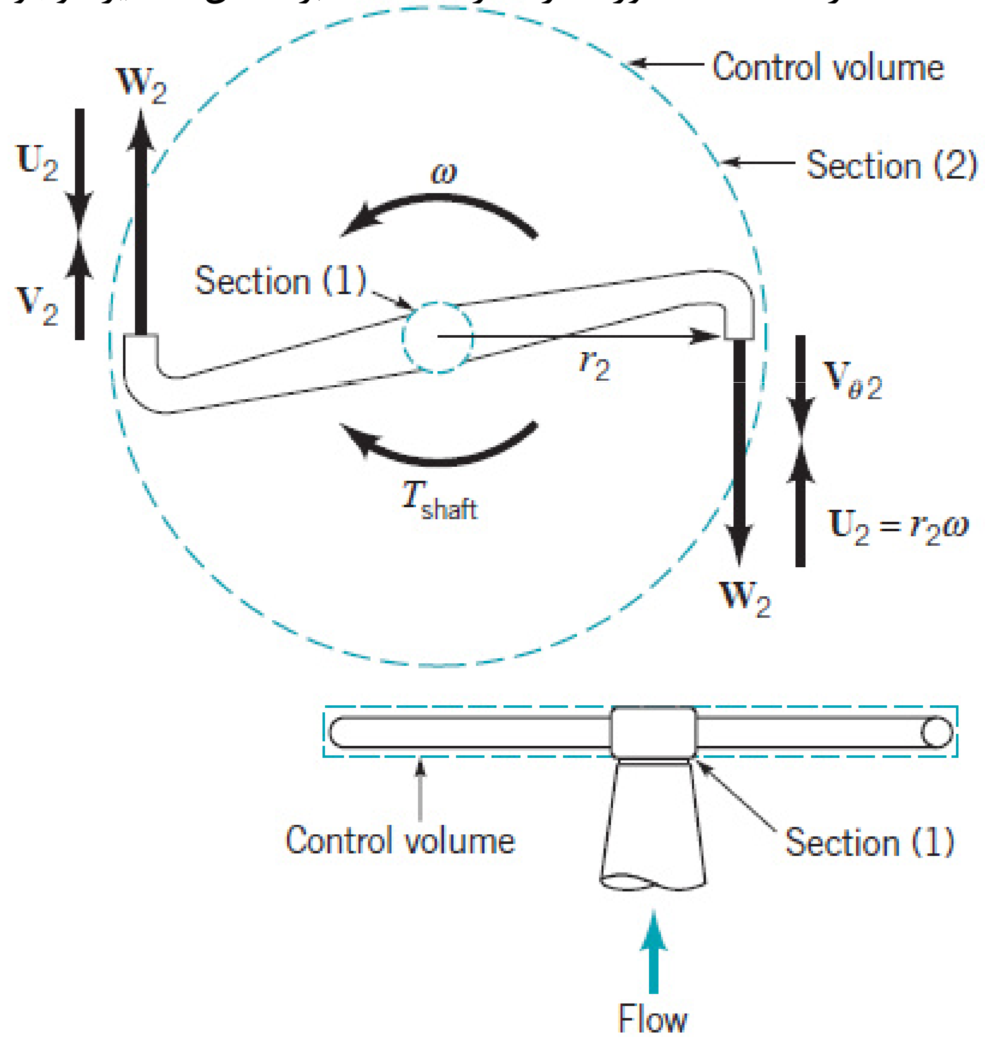
برای ساده سازی فرضیات ذیل را در نظر می گیریم:

۱- فرض می شود که جریان یک بعدی است (توزیع یکنواخت متوسط سرعت در هر مقطع)

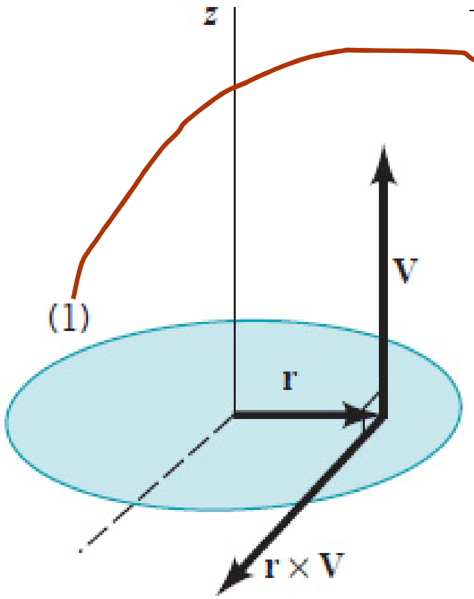
۲- شرایط دایم و یا متوسط زمانی را برای مسایل در نظر می گیریم. لذا $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{cv}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho \, d\forall = 0$

۳-در معادله گشتاور اندازه حرکت، فقط بر اساس مقادیر موجود بر روی محور چرخش بررسی صورت می گیرد

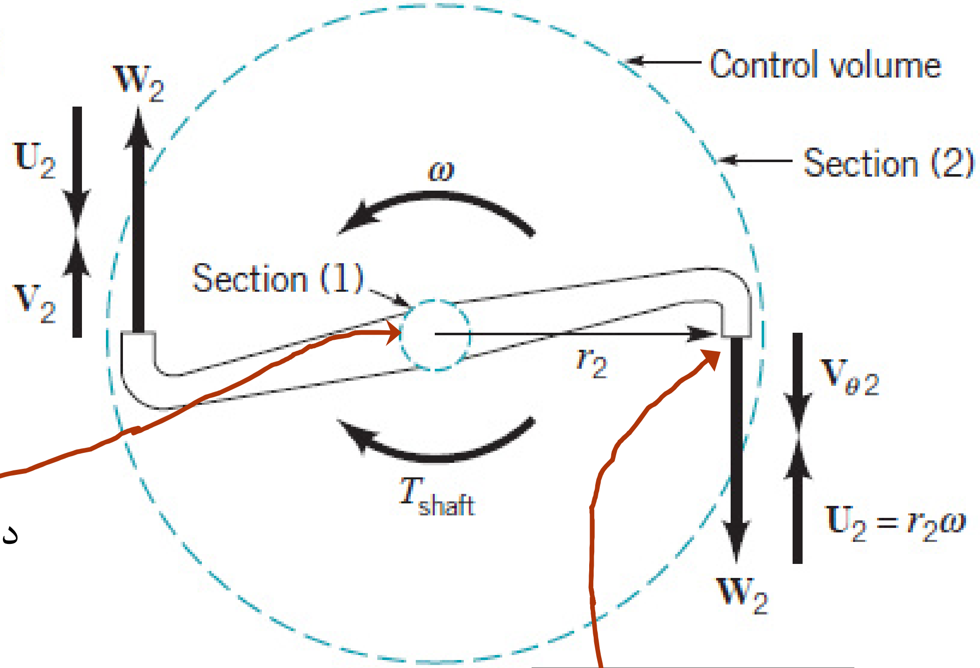




By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology



$$\int_{cs} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$



در راستای محور z جریان نداریم

$\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ is $r_2 V_{\theta 2}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{U}$$

relative velocity, $\mathbf{W}$

where $\mathbf{U}$ is the velocity of the moving nozzle as measured relative to the fixed control surface.

$$\left[\int_{cs} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA\right]_{\text{axial}} = (-r_2 V_{\theta 2})(+\dot{m})$$

if $\mathbf{V}_\theta$ and $\mathbf{U}$ are in the same direction, use $+$; if $\mathbf{V}_\theta$ and $\mathbf{U}$ are in opposite directions, use $-$

$$\sum \left[(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{\substack{\text{contents of the}\\ \text{control volume}}}\right]_{\text{axial}} = \mathbf{T}_{\text{shaft}}$$

اگر مثبت باشد، گشتاور د راستای چرخش است و اگر منفی باشد در خلاف مسیر چرخش است

$$-r_2 V_{\theta 2} \dot{m} = T_{\text{shaft}}$$

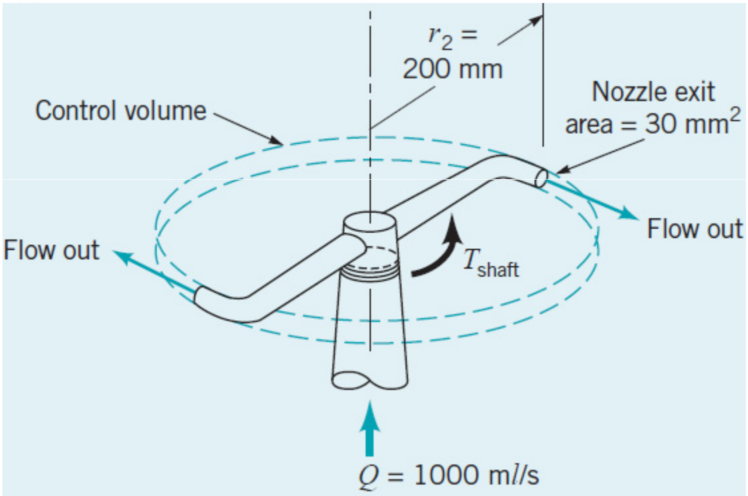
shaft power, $\dot{W}_{\text{shaft}} \rightarrow \dot{W}_{\text{shaft}} = T_{\text{shaft}}\,\omega = -r_2 V_{\theta 2}\dot{m}\,\omega$

$r_2\omega$ is the speed of each sprinkler nozzle, U, $\rightarrow \dot{W}_{\text{shaft}} = -U_2 V_{\theta 2}\dot{m}$

Shaft work per unit mass, w_{shaft}, is equal to $\dot{W}_{\text{shaft}}/\dot{m} \rightarrow w_{\text{shaft}} = -U_2 V_{\theta 2}$

نکته: مقدار منفی به این معنی است که سیال بر روی روتور کار انجام می دهد.

$$\boxed{T_{\text{shaft}} = (-\dot{m}_{\text{in}})(\pm r_{\text{in}} V_{\theta\text{in}}) + \dot{m}_{\text{out}}(\pm r_{\text{out}} V_{\theta\text{out}})}$$



مثال: برای یک آبپاش مطابق شکل مقابل در شرایط دائم،

۱- گشتاور لازم برای ثابت نگه داشتن آبپاش را بدست آورید.

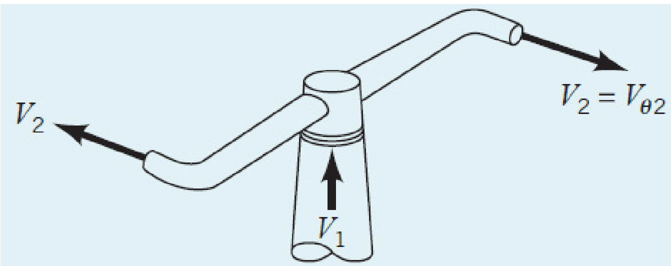
۲- مقدار گشتاور مورد نیاز برای حالتی که آبپاش ۵۰۰ دور در دقیقه داشته باشد.

۳- در صورتی که هیچ گشتاور مقومی وجود نداشته باشد، مقدار سرعت چرخشی آبپاش چند است؟

$$\left.\begin{aligned} T_{\text{shaft}} &= -r_2 V_{\theta 2}\dot{m} \\ V_{\theta 2} &= V_2 \end{aligned}\right\} \quad T_{\text{shaft}} = -r_2 V_2 \dot{m}$$

$$\dot{m} = Q\rho = \frac{(1000\ \text{ml/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{liter})(999\ \text{kg/m}^3)}{(1000\ \text{ml/liter})} = 0.999\ \text{kg/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{\text{area of the two nozzles}} = 16.7\ \text{m/s} \rightarrow T_{\text{shaft}} = -3.34\ \text{N}\cdot\text{m}$$

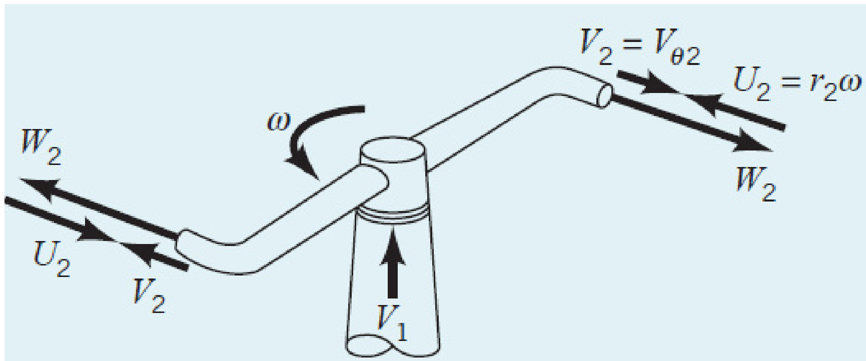


$V_2 = W_2 - U_2$

$W_2 = 16.7\ \text{m/s}$

$U_2 = r_2\omega$

$V_2 = 6.2\ \text{m/s}$



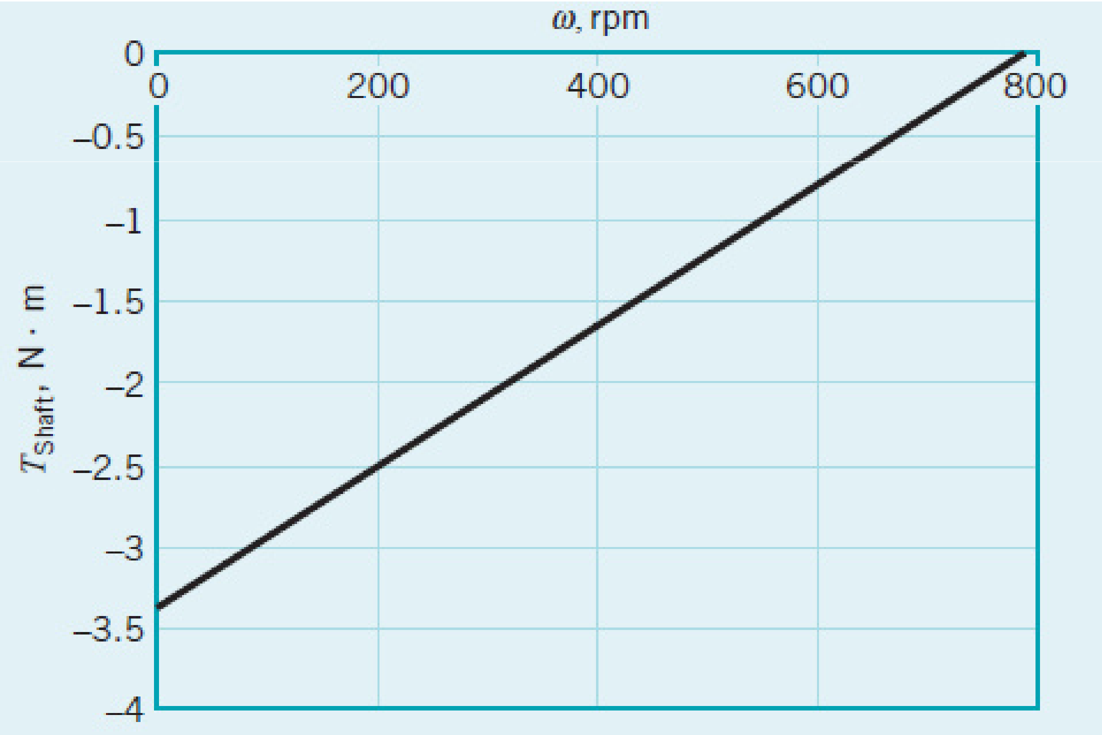
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

$\dot{m} = 0.999 \text{ kg/s}$ → $T_{\text{shaft}} = -\dfrac{(200 \text{ mm})(6.2 \text{ m/s})\ 0.999 \text{ kg/s}\ [1\,(\text{N/kg})/(\text{m/s}^2)]}{(1000 \text{ mm/m})} = -1.24 \text{ N}\cdot\text{m}$

$T_{\text{shaft}} = -r_2(W_2 - r_2\omega)\dot{m}$ no resisting torque → $0 = -r_2(W_2 - r_2\omega)\dot{m}$ → $\omega = \dfrac{W_2}{r_2}$

$$\omega = \frac{W_2}{r_2} = \frac{(16.7 \text{ m/s})(1000 \text{ mm/m})}{(200 \text{ mm})} = 83.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{(83.5 \text{ rad/s})(60 \text{ s/min})}{2\ \pi \text{ rad/rev}} = 797 \text{ rpm}$$



در حالت عدم وجودگشتاور، مومنتوم زاویه ای صفر است
(سرعت نسبی صفر است).

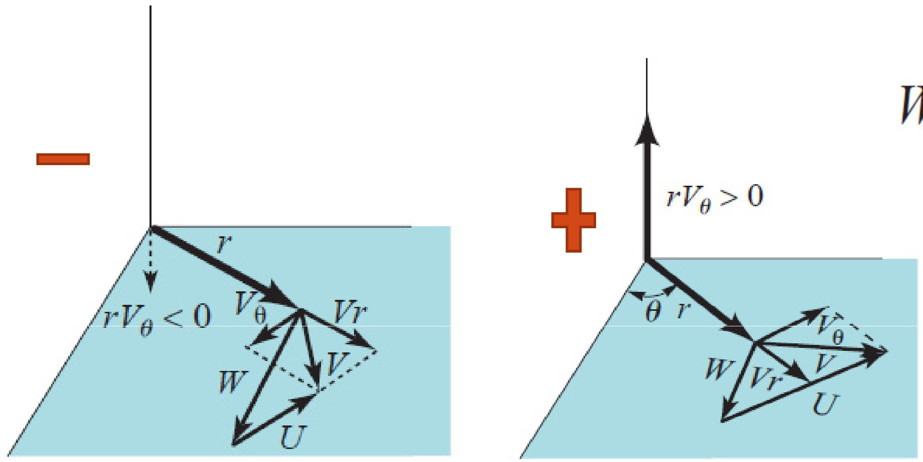
By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

The shaft power, $\dot{W}_{\text{shaft}}$, is related to shaft torque, T_{shaft}, by $\dot{W}_{\text{shaft}} = T_{\text{shaft}}\,\omega$

if V_θ and U are in the same direction, ➡ rV_θ product is positive

If V_θ and U are in opposite directions ➡ the rV_θ product is negative

The sign of the shaft torque is in the same direction along the axis of rotation as ω



$\dot{W}_{\text{shaft}}$ is positive, power is into the fluid (for example, a pump)

when $\dot{W}_{\text{shaft}}$ is negative power is out of the fluid (for example, a turbine)

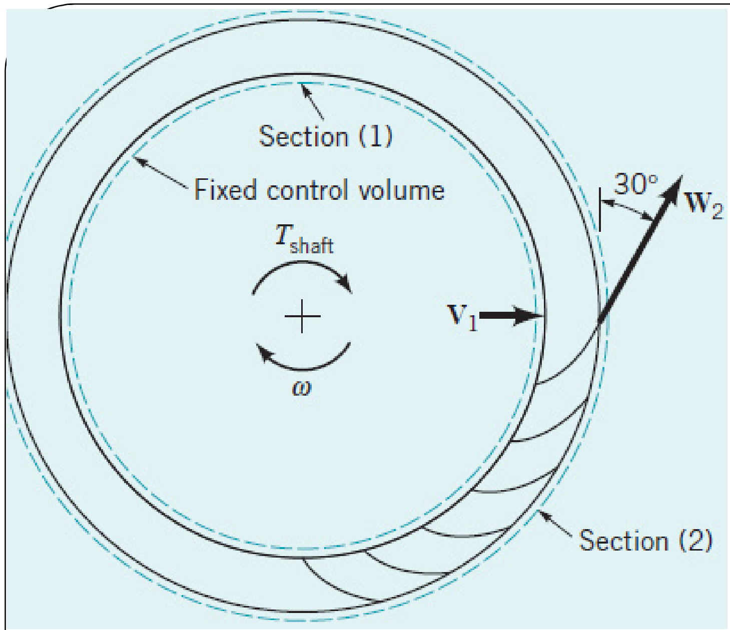
$$\dot{W}_{\text{shaft}} = (-\dot{m}_{\text{in}})(\pm r_{\text{in}}\omega V_{\theta\text{in}}) + \dot{m}_{\text{out}}(\pm r_{\text{out}}\omega V_{\theta\text{out}})$$

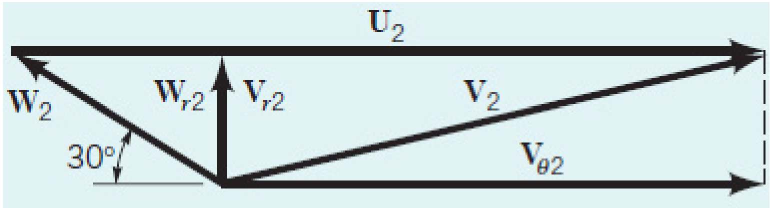
$r\omega = U$ ➡ $\boxed{\dot{W}_{\text{shaft}} = (-\dot{m}_{\text{in}})(\pm U_{\text{in}} V_{\theta\text{in}}) + \dot{m}_{\text{out}}(\pm U_{\text{out}} V_{\theta\text{out}})}$

The "+" is used for the UV_θ product when U and V_θ are in the same direction the "−" is used when U and V_θ are in opposite directions

The shaft work per unit mass, w_{shaft} $\boxed{w_{\text{shaft}} = -(\pm U_{\text{in}} V_{\theta\text{in}}) + (\pm U_{\text{out}} V_{\theta\text{out}})}$

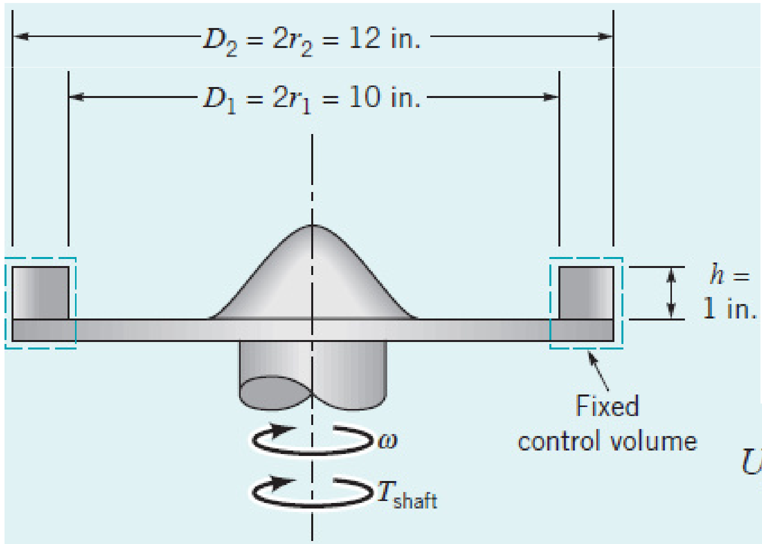
مثال: یک فن دمنده با قطر داخلی ۱۰ اینچ و قطر خارجی ۱۲ اینچ و ارتفاع هر پره برابر ۱ اینچ می باشد. دبی حجمی فن در شرایط دایم برابر $230\ \text{ft}^3/\text{min}$ و سرعت مطلق هوای ورودی شعاعی و برابر V1 می باشد. در صورتی که سیال با زاویه ۳۰ درجه و مماس بر پره خارج شده و دور فن برابر rpm ۱۷۲۵است. توان مورد نیاز برای این فن چند است؟





$$1\,\text{slug} = 32.174\ \text{lbm}$$

$$\rho_{\text{air}} = (2.38 \times 10^{-3}\ \text{slug/ft}^3)(32.174\,\text{lbm/slug}) = 0.0766\ \text{lbm/ft}^3$$



$$\dot{W}_{\text{shaft}} = -\dot{m}_1(\pm \underbrace{U_1 V_{\theta 1}}_{0\ (\mathbf{V}_1\ \text{is radial})}) + \dot{m}_2(\pm U_2 V_{\theta 2})$$

$$\dot{m} = \rho Q = \frac{(2.38 \times 10^{-3}\ \text{slug/ft}^3)(230\ \text{ft}^3/\text{min})}{(60\ \text{s/min})} = 0.00912\ \text{slug/s}$$

$$\dot{m} = \frac{(0.0766\ \text{lbm/ft}^3)(230\ \text{ft}^3/\text{min})}{(60\ \text{s/min})} = 0.294\ \text{lbm/s}$$

$$U_2 = r_2\omega = \frac{(6\ \text{in.})(1725\ \text{rpm})(2\pi\ \text{rad/rev})}{(12\ \text{in./ft})(60\ \text{s/min})} = 90.3\ \text{ft/s}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{W}_2 + \mathbf{U}_2$$

$$V_{\theta 2} = U_2 - W_2 \cos 30^\circ$$

$$W_2 \sin 30^\circ = V_{r2}$$

$$\dot{m} = \rho A_2 V_{r2}$$

$$A_2 = 2\,\pi r_2 h$$

$$\dot{m} = \rho 2\pi r_2 h V_{r2}$$

$$W_2 = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi r_2 h \sin 30^\circ} = \frac{\rho Q}{\rho 2\pi r_2 h \sin 30^\circ} = \frac{Q}{2\pi r_2 h \sin 30^\circ}$$

$$W_2 = 29.3\ \text{ft/s}$$

$$V_{\theta 2} = U_2 - W_2 \cos 30^\circ = 64.9\ \text{ft/s}$$

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = \dot{m}\, U_2 V_{\theta 2} = \frac{(0.00912 \text{ slug/s})(90.3 \text{ ft/s})(64.9 \text{ ft/s})}{[1\,(\text{slug} \cdot \text{ft/s}^2)/\text{lb}][550\,(\text{ft} \cdot \text{lb})/(\text{hp} \cdot \text{s})]}$$

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = \frac{(0.294 \text{ lbm/s})(90.3 \text{ ft/s})(64.9 \text{ ft/s})}{[32.174\,(\text{lbm} \cdot \text{ft})/(\text{lb/s}^2)][550\,(\text{ft} \cdot \text{lb})/(\text{hp} \cdot \text{s})]}$$

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = 0.097 \text{ hp}$$

first law of thermodynamics

قانون اول ترمودینامیک- معادله انرژی

مجموع نرخ انرژی ورودی به سیستم بواسطه کار انجام شده روی سیستم + نرخ انرژی ورودی بواسطه انتقال حرارت به سیستم= تغییرات انرژی سیستم

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} e\rho\, d\forall = \left(\sum \dot{Q}_{\text{in}} - \sum \dot{Q}_{\text{out}}\right)_{\text{sys}} + \left(\sum \dot{W}_{\text{in}} - \sum \dot{W}_{\text{out}}\right)_{\text{sys}} \longrightarrow \frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} e\rho\, d\forall = (\dot{Q}_{\underset{\text{in}}{\text{net}}} + \dot{W}_{\underset{\text{in}}{\text{net}}})_{\text{sys}}$$

$$e = \check{u} + \frac{V^2}{2} + gz$$

internal energy per unit mass

Heat transfer and work transfer are "+" going into the system and "−" coming out.

$$(\dot{Q}_{\underset{\text{in}}{\text{net}}} + \dot{W}_{\underset{\text{in}}{\text{net}}})_{\text{sys}} = (\dot{Q}_{\underset{\text{in}}{\text{net}}} + \dot{W}_{\underset{\text{in}}{\text{net}}})_{\substack{\text{coincident}\\ \text{control volume}}}$$

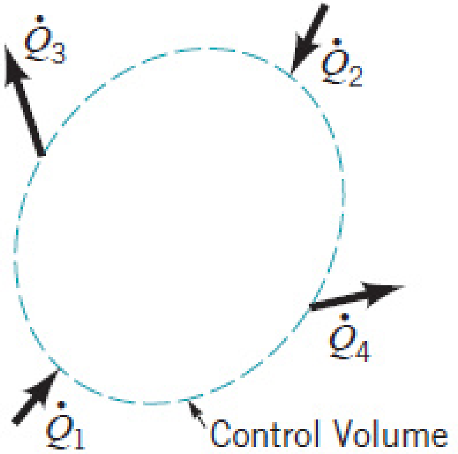
$$\frac{DB_{\text{sys}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho b\, d\forall + \int_{\text{cs}} \rho b\, \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

with the parameter b set equal to e $\longrightarrow$ $\dfrac{D}{Dt}\displaystyle\int_{\text{sys}} e\rho\, d\forall = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{cs}} e\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{cs}} e\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = (\dot{Q}_{\underset{\text{in}}{\text{net}}} + \dot{W}_{\underset{\text{in}}{\text{net}}})_{\text{cv}}}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

The heat transfer rate, $\dot{Q}$ ➡ temperature difference $\begin{cases} \text{radiation} \\ \text{conduction} \\ \text{convection} \end{cases}$



the process is *adiabatic* ➡ $\dot{Q}$, is zero

$\dot{W}$, also called *power*
- وقتی حجم کنترل بر روی محیط کار انجام می دهد، + است
- وقتی محیط بر روی حجم کنترل کار انجام می دهد، – است

$$\dot{Q}_{\substack{\text{net}\\ \text{in}}} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 - \dot{Q}_3 - \dot{Q}_4$$

غالبا کار حجم کنترل بر روی محیط و یا بالعکس، با استفاده از یک محور انتقال دهنده صورت می گیرد لذا:

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = T_{\text{shaft}}\omega$$

$$\dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\ \text{net in}}} = \sum \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\ \text{in}}} - \sum \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\ \text{out}}}$$

نوعی دیگری از کار انجام شده توسط تنشهای نرمال است

$$\delta \dot{W}_{\text{normal stress}} = \delta \mathbf{F}_{\text{normal stress}} \cdot \mathbf{V}$$

the fluid normal stress, σ, ➡ $\sigma = -p$ ➡ $\delta \dot{W}_{\text{normal stress}} = \sigma \hat{\mathbf{n}}\, \delta A \cdot \mathbf{V} = -p\hat{\mathbf{n}}\, \delta A \cdot \mathbf{V} = -p\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \delta A$

$$\dot{W}_{\substack{\text{normal}\\ \text{stress}}} = \int_{\text{cs}} \sigma \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_{\text{cs}} -p\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

نوعی دیگری از کار انجام شده توسط تنشهای برشی است

$$\delta \dot{W}_{\text{tangential stress}} = \delta \mathbf{F}_{\text{tangential stress}} \cdot \mathbf{V}$$

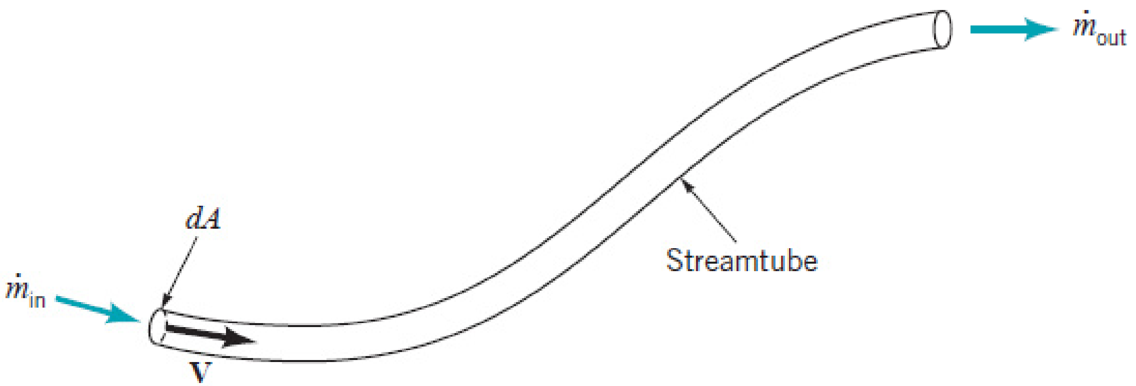
بدلیل عدم لغزش، سرعت صفر بوده و یا در صورت عمود بودن سرعت بر تنش برشی ، مجددا این ضرب صفر خواهد شد. از این رو از این عبارت صرفنظر می شود

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} e\rho \, d\forall + \int_{cs} e\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\ \text{in}}} + \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\ \text{net in}}} - \int_{cs} p\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

energy equation:
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} e\rho \, d\forall + \int_{cs}\left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\ \text{in}}} + \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\ \text{net in}}}}$$

$$\int_{cs}\left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum_{\substack{\text{flow}\\ \text{out}}}\left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\dot{m} - \sum_{\substack{\text{flow}\\ \text{in}}}\left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\dot{m}$$



$$\int_{cs}\left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)_{out}\dot{m}_{out} - \left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)_{in}\dot{m}_{in}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} e\rho\, dV + \int_{\text{CS}}\left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\\text{in}}} + \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}}$$

Steady=0

$$\int_{\text{CS}}\left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)_{\text{out}}\dot{m}_{\text{out}} - \left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)_{\text{in}}\dot{m}_{\text{in}}$$

$$\dot{m}\left[\check{u}_{\text{out}} - \check{u}_{\text{in}} + \left(\frac{p}{\rho}\right)_{\text{out}} - \left(\frac{p}{\rho}\right)_{\text{in}} + \frac{V_{\text{out}}^2 - V_{\text{in}}^2}{2} + g(z_{\text{out}} - z_{\text{in}})\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\\text{in}}} + \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}}$$

enthalpy, $\check{h}$

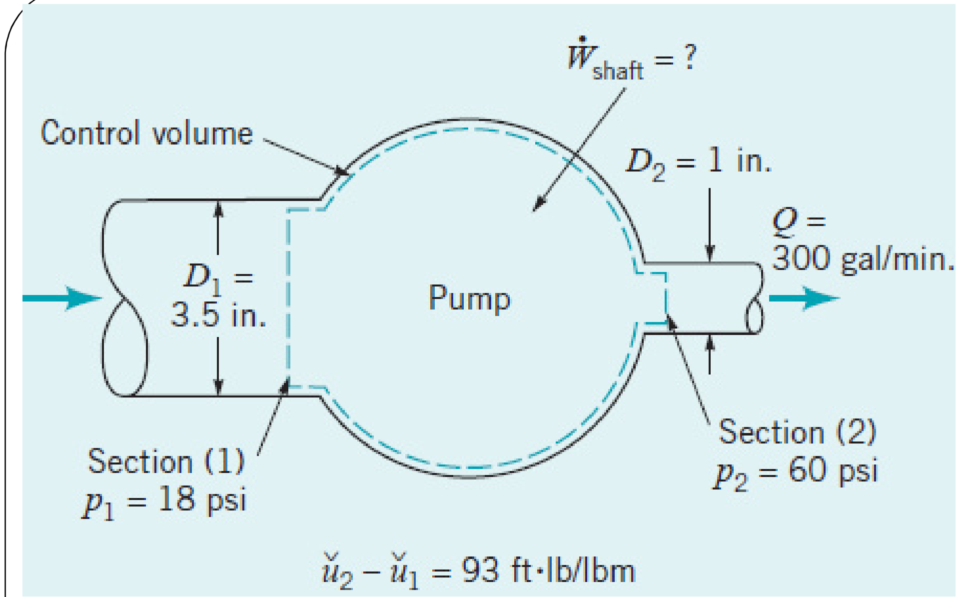
$$\check{h} = \check{u} + \frac{p}{\rho}$$

$$\dot{m}\left[\check{h}_{\text{out}} - \check{h}_{\text{in}} + \frac{V_{\text{out}}^2 - V_{\text{in}}^2}{2} + g(z_{\text{out}} - z_{\text{in}})\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\\text{in}}} + \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}}$$

is often used for solving compressible flow problems

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مقال: یک پمپ آدیاباتیک آب را در شرایط دایم از فشار ۱۸ psia به فشار ۶۰ psia می رساند. در صورتی که دبی پمپ ۳۰۰gal/min و تغییرات انرژی داخلی ورودی و خروجی برابر ۹۳ ft.lb/lbm باشد، توان مورد نیاز پمپ را محاسبه نمایید



$$\dot m\left[\check u_2 - \check u_1 + \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho}\right)_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \overbrace{\cancel{g(z_2 - z_1)}}^{0\text{ (no elevation change)}}\right] = \underbrace{\cancel{\dot Q_{\substack{\text{net}\\\text{in}}}}}_{0\text{ (adiabatic flow)}} + \dot W_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}}$$

$$\dot m = \rho Q = \frac{(1.94\ \text{slugs/ft}^3)(300\ \text{gal/min})(32.174\ \text{lbm/slug})}{(7.48\ \text{gal/ft}^3)(60\ \text{s/min})} = 41.8\ \text{lbm/s}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D^2/4}$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{(300\ \text{gal/min})4(12\ \text{in./ft})^2}{(7.48\ \text{gal/ft}^3)(60\ \text{s/min})\pi(3.5\ \text{in.})^2} = 10.0\ \text{ft/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{(300\ \text{gal/min})4\ (12\ \text{in./ft})^2}{(7.48\ \text{gal/ft}^3)(60\ \text{s/min})\pi(1\ \text{in.})^2} = 123\ \text{ft/s}$$

$$\begin{aligned}\dot W_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}} &= (41.8\ \text{lbm/s})\Bigg[(93\ \text{ft}\cdot\text{lb/lbm}) \\ &+ \frac{(60\ \text{psi})(144\ \text{in.}^2/\text{ft}^2)}{(1.94\ \text{slugs/ft}^3)(32.174\ \text{lbm/slug})} \\ &- \frac{(18\ \text{psi})(144\ \text{in.}^2/\text{ft}^2)}{(1.94\ \text{slugs/ft}^3)(32.174\ \text{lbm/slug})} \\ &+ \frac{(123\ \text{ft/s})^2 - (10.0\ \text{ft/s})^2}{2[32.174\ (\text{lbm}\cdot\text{ft})/(\text{lb}\cdot\text{s}^2)]}\Bigg] \\ &\times \frac{1}{[550(\text{ft}\cdot\text{lb/s})/\text{hp}]} = 32.2\ \text{hp}\end{aligned}$$

when shaft work is zero

$$\dot{m}\left[\check{u}_{\text{out}} - \check{u}_{\text{in}} + \left(\frac{p}{\rho}\right)_{\text{out}} - \left(\frac{p}{\rho}\right)_{\text{in}} + \frac{V_{\text{out}}^2 - V_{\text{in}}^2}{2} + g(z_{\text{out}} - z_{\text{in}})\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\\text{in}}}$$

the *one-dimensional, steady flow energy equation* is valid for compressible and compressible flows

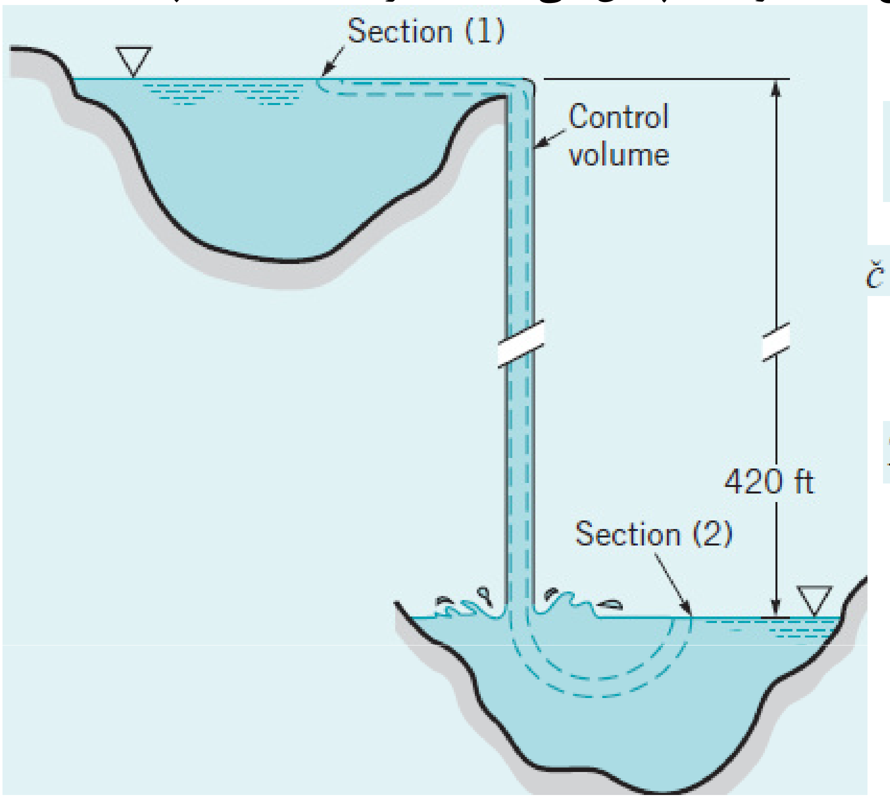
For compressible flows

one-dimensional, steady flow energy equation

$$\boxed{\dot{m}\left[\check{h}_{\text{out}} - \check{h}_{\text{in}} + \frac{V_{\text{out}}^2 - V_{\text{in}}^2}{2} + g(z_{\text{out}} - z_{\text{in}})\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\\text{in}}}}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: آب از آبشاری با ارتفاع ۴۲۰ فوت به پایین می آید. تغییرات دمای آب چند است؟



$$T_2 - T_1 = \frac{g(z_1 - z_2)}{\check{c}}$$

$$\check{c} = [778 \text{ ft} \cdot \text{lb}/(\text{lbm} \cdot {}^\circ\text{R})]$$

$$T_2 - T_1 = 0.540\ {}^\circ\text{R}$$

$$\dot{m}\left[\check{u}_2 + \check{u}_1 + \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho}\right)_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right] = \dot{Q}_{\underset{\text{in}}{\text{net}}}$$

We assume that the flow is adiabatic ➡ $\dot{Q}_{\text{net in}} = 0$

incompressible and atmospheric pressure ➡ $\left(\frac{p}{\rho}\right)_1 = \left(\frac{p}{\rho}\right)_2$

$V_1 = V_2 = 0$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مقایسه بین معادله انرژی و معادله برنولی

energy equation

one-dimensional
steady
incompressible
$\dot{W}_{\text{shaft net in}}$, is zero

$$\dot{m}\left[\check{u}_{\text{out}} - \check{u}_{\text{in}} + \frac{p_{\text{out}}}{\rho} - \frac{p_{\text{in}}}{\rho} + \frac{V_{\text{out}}^2 - V_{\text{in}}^2}{2} + g(z_{\text{out}} - z_{\text{in}})\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\\text{in}}}$$

تقسیم بر $\dot{m}$

$$\boxed{\frac{p_{\text{out}}}{\rho} + \frac{V_{\text{out}}^2}{2} + gz_{\text{out}} = \frac{p_{\text{in}}}{\rho} + \frac{V_{\text{in}}^2}{2} + gz_{\text{in}} - (\check{u}_{\text{out}} - \check{u}_{\text{in}} - q_{\substack{\text{net}\\\text{in}}})}$$

$$q_{\substack{\text{net}\\\text{in}}} = \frac{\dot{Q}_{\text{net in}}}{\dot{m}}$$

the Bernoulli equation

steady
incompressible
negligible viscous effects

$$p_{\text{out}} + \frac{\rho V_{\text{out}}^2}{2} + \gamma z_{\text{out}} = p_{\text{in}} + \frac{\rho V_{\text{in}}^2}{2} + \gamma z_{\text{in}}$$

$$\boxed{\frac{p_{\text{out}}}{\rho} + \frac{V_{\text{out}}^2}{2} + gz_{\text{out}} = \frac{p_{\text{in}}}{\rho} + \frac{V_{\text{in}}^2}{2} + gz_{\text{in}}}$$

$\check{u}_{\text{out}} - \check{u}_{\text{in}} - q_{\substack{\text{net}\\\text{in}}} = 0$ → energy equation = the Bernoulli equation

(second law of thermodynamics)

$$\check{u}_{\text{out}} - \check{u}_{\text{in}} - q_{\substack{\text{net}\\\text{in}}} > 0$$

$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$ *available energy*

$\check{u}_{\text{out}} - \check{u}_{\text{in}} - q_{\substack{\text{net}\\\text{in}}} = \text{loss}$ ↔ because of friction

$$\boxed{\frac{p_{\text{out}}}{\rho} + \frac{V_{\text{out}}^2}{2} + gz_{\text{out}} = \frac{p_{\text{in}}}{\rho} + \frac{V_{\text{in}}^2}{2} + gz_{\text{in}} - \text{loss}}$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering,
Babol University of Technology

one-dimensional
steady
incompressible
with friction and shaft work.

flows through pumps, blowers, fans, and turbines

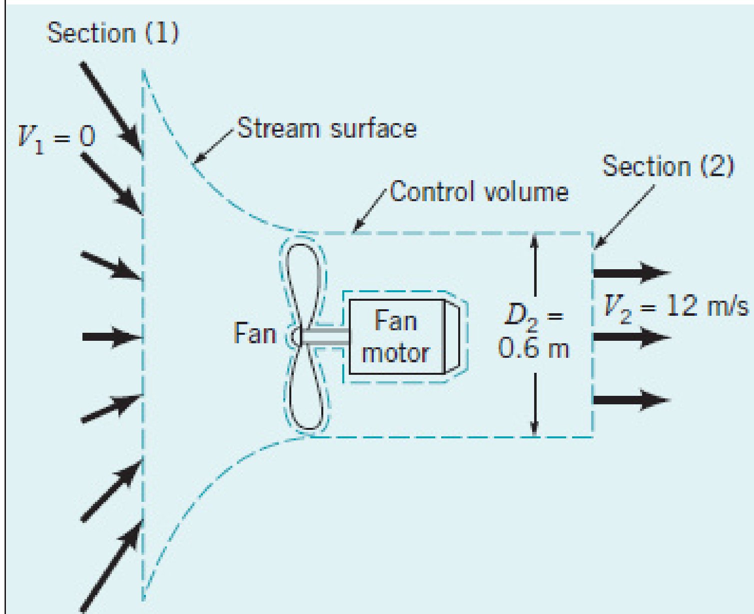
$$\dot{m}\left[\breve{u}_{\text{out}} - \breve{u}_{\text{in}} + \frac{p_{\text{out}}}{\rho} - \frac{p_{\text{in}}}{\rho} + \frac{V_{\text{out}}^2 - V_{\text{in}}^2}{2} + g(z_{\text{out}} - z_{\text{in}})\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\\text{in}}} + \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}}$$

$$w_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}} = \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}}/\dot{m} \;\Rightarrow\; \frac{p_{\text{out}}}{\rho} + \frac{V_{\text{out}}^2}{2} + gz_{\text{out}} = \frac{p_{\text{in}}}{\rho} + \frac{V_{\text{in}}^2}{2} + gz_{\text{in}} + w_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}} - (\breve{u}_{\text{out}} - \breve{u}_{\text{in}} - q_{\substack{\text{net}\\\text{in}}})$$

$\breve{u}_{\text{out}} - \breve{u}_{\text{in}} - q_{\text{net in}}$ equals the loss $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{p_{\text{out}}}{\rho} + \frac{V_{\text{out}}^2}{2} + gz_{\text{out}} = \frac{p_{\text{in}}}{\rho} + \frac{V_{\text{in}}^2}{2} + gz_{\text{in}} + w_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}} - \text{loss}}$$

mechanical energy equation or the *extended Bernoulli energy*



مثال: یک فن محوری با توان ۰/۴ kW میتواند دبی هوا با قطر ۰/۶ متر و سرعت ۱۲m/s ایجاد نماید. چه مقدار از توان صرف ایجاد دبی سیال هوا شده است. ازسرعت سیال در ورودی صرفنظر می شود.

0 (atmospheric pressures cancel) 0 ($V_1 \approx 0$)

$$w_{\substack{\text{shaft}\\\text{net in}}} - \text{loss} = \left(\cancel{\frac{p_2}{\rho}} + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{gz_2}\right) - \left(\cancel{\frac{p_1}{\rho}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2}} + \cancel{gz_1}\right)$$

0 (no elevation change)

$$w_{\text{shaft net in}} - \text{loss} = \frac{V_2^2}{2} = \frac{(12\ \text{m/s})^2}{2[1(\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)]} = 72.0\ \text{N}\cdot\text{m/kg}$$

$$w_{\text{shaft net in}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft net in}}}{(\rho\pi D_2^2/4)V_2} = \frac{(0.4\ \text{kW})[1000\ (\text{Nm})/(\text{skW})]}{(1.23\ \text{kg/m}^3)[(\pi)(0.6\ \text{m})^2/4](12\ \text{m/s})}$$

$$w_{\text{shaft net in}} = 95.8\ \text{N}\cdot\text{m/kg}$$

$$w_{\text{shaft net in}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft net in}}}{\dot{m}}$$

$$\dot{m} = \rho A V = \rho \frac{\pi D_2^2}{4} V_2$$

ρ, we use 1.23 kg/m^3 (standard air)

efficiency, $\eta = \dfrac{w_{\text{shaft net in}} - \text{loss}}{w_{\text{shaft net in}}}$ → $\eta = \dfrac{72.0\ \text{N}\cdot\text{m/kg}}{95.8\ \text{N}\cdot\text{m/kg}} = 0.752$

$$\rho \times \left(\frac{p_{\text{out}}}{\rho} + \frac{V_{\text{out}}^2}{2} + gz_{\text{out}} = \frac{p_{\text{in}}}{\rho} + \frac{V_{\text{in}}^2}{2} + gz_{\text{in}} + w_{\text{shaft net in}} - \text{loss}\right)$$

$$\Rightarrow\ p_{\text{out}} + \frac{\rho V_{\text{out}}^2}{2} + \gamma z_{\text{out}} = p_{\text{in}} + \frac{\rho V_{\text{in}}^2}{2} + \gamma z_{\text{in}} + \rho w_{\text{shaft net in}} - \rho(\text{loss}) \quad / \quad \gamma = \rho g$$

energy per unit volume

$$\boxed{\frac{p_{\text{out}}}{\gamma} + \frac{V_{\text{out}}^2}{2g} + z_{\text{out}} = \frac{p_{\text{in}}}{\gamma} + \frac{V_{\text{in}}^2}{2g} + z_{\text{in}} + h_s - h_L}$$

shaft work head

$$h_s = w_{\text{shaft net in}}/g = \frac{\dot{W}_{\text{shaft net in}}}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft net in}}}{\gamma Q}$$

$h_L = \text{loss}/g$ is the ***head loss***

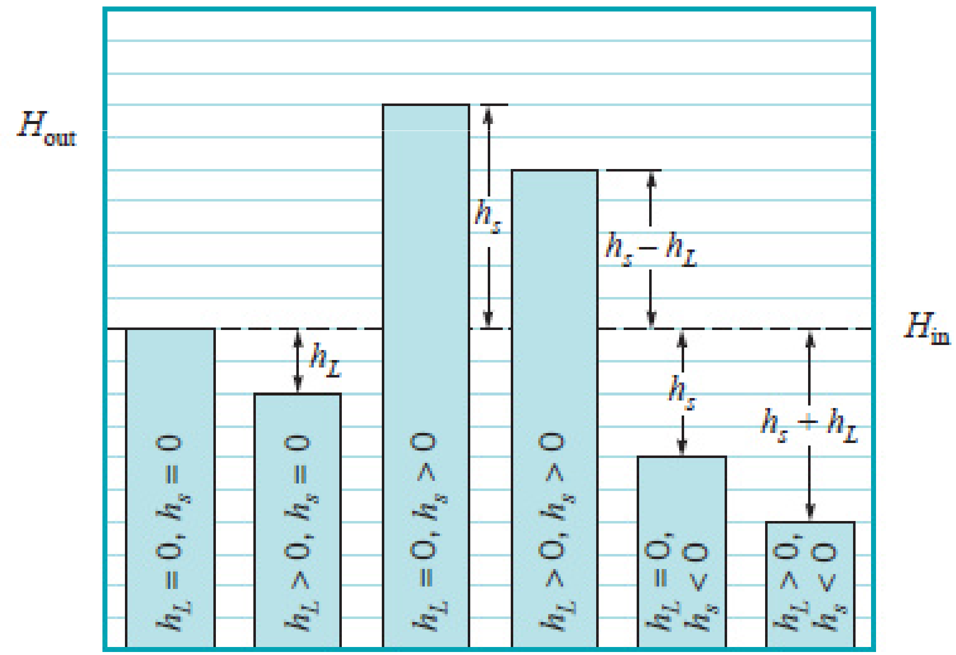
If a turbine is in the control volume, h_s is negative

For a pump in the control volume, h_s is positive

$$H = \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{p_{\text{out}}}{\gamma} + \frac{V_{\text{out}}^2}{2g} + z_{\text{out}}}_{H_{\text{out}}} = \underbrace{\frac{p_{\text{in}}}{\gamma} + \frac{V_{\text{in}}^2}{2g} + z_{\text{in}}}_{H_{\text{in}}} + h_s - h_L}$$

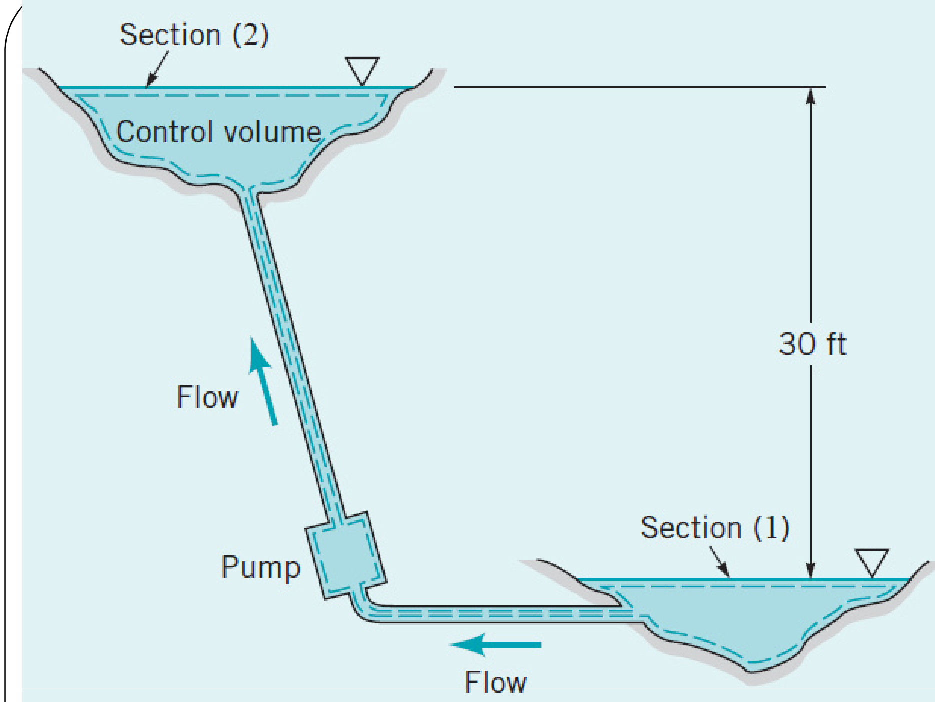
$$H_{\text{out}} = H_{\text{in}} + h_s - h_L$$



در شرایط ایده آل، بدون کار و انتقال حرارت میزان هد ورودی و خروجی برابر است. در صورت وجود تلفات لزجت، میزان هد خروجی از هد ورودی کمتر خواهد شد. در صورت وجود کار ناشی از اثر سیال مانند کار توربین، مقدار هد خروجی به میزان مقدار هد کار محور، از هد ورودی کم می شود. در صورت وجود تلفات این مقدار کمتر خواهد شد.

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: پمپ نشان داده شده در شکل ۱۰ اسب بخار به آب اضافه می نماید تا از دریاچه پایین با دریاچه بالا برود. اختلاف ارتفاع دو دریاچه ۳۰ft و هد تلفات ۱۵ft می باشد. مقدار دبی و توان تلفات را بدست آورید.



$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_s - h_L$$

$p_2 = p_1 = 0$ $\quad V_2 = V_1 = 0$ $\quad h_s = h_L + z_2 - z_1$

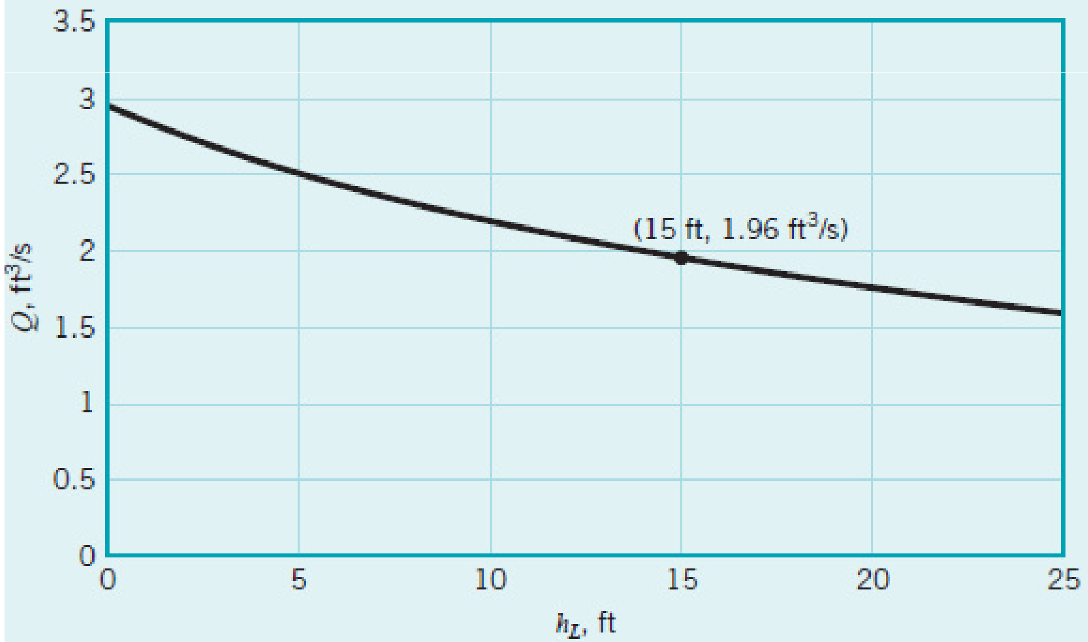
$z_2 = 30$ ft, $z_1 = 0$, and $h_L = 15$ ft

$$h_s = \dot{W}_{\text{shaft net in}}/\gamma Q$$
$$= (10 \text{ hp})(550 \text{ ft·lb/s/hp})/(62.4 \text{ lb/ft}^3)\, Q$$
$$= 88.1/Q$$

where h_s is in ft when Q is in ft^3/s.

$$h_s = h_L + z_2 - z_1$$

$$88.1/Q = 15 \text{ ft} + 30 \text{ ft} \rightarrow Q = 1.96 \text{ ft}^3/\text{s}$$



$$\dot{W}_{\text{loss}} = \gamma Q h_L = (62.4 \text{ lb/ft}^3)(1.96 \text{ ft}^3/\text{s})(15 \text{ ft})$$
$$= 1830 \text{ ft·lb/s } (1 \text{ hp}/550 \text{ ft·lb/s})$$
$$= 3.33 \text{ hp}$$

معادله انرژی برای جریان غیر یکنواخت

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} e\rho\, d\forall + \int_{cs}\left(\check{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{Q}_{\substack{\text{net}\\ \text{in}}} + \dot{W}_{\substack{\text{shaft}\\ \text{net in}}}}$$

$$\int_{cs}\frac{V^2}{2}\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \qquad \int_{cs}\frac{V^2}{2}\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{m}\left(\frac{\alpha_{out}\overline{V}^2_{out}}{2} - \frac{\alpha_{in}\overline{V}^2_{in}}{2}\right)$$

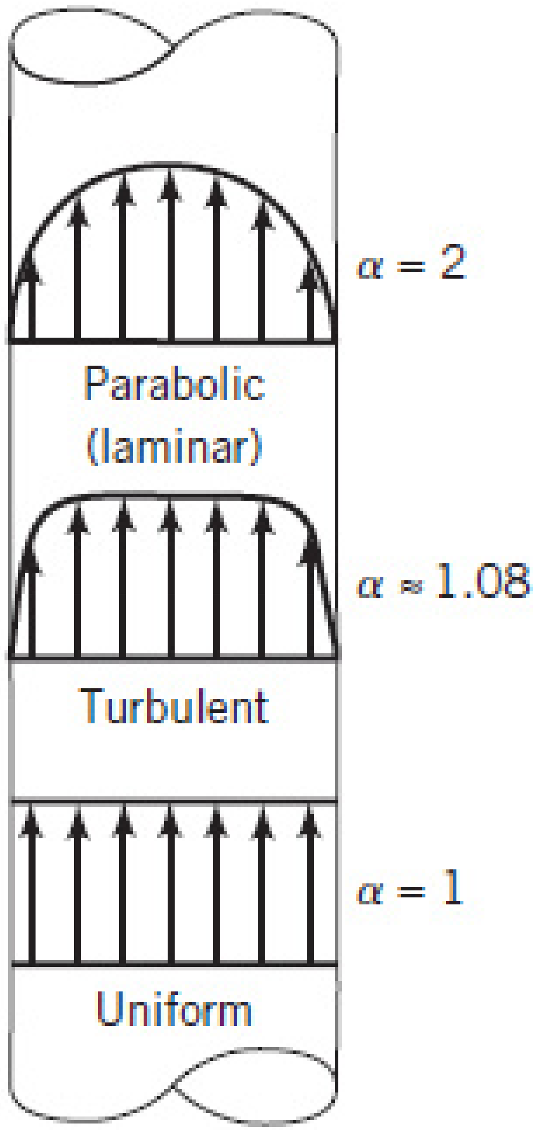
α is the ***kinetic energy coefficient*** $\qquad \overline{V}$ is the average velocity

$$\frac{\dot{m}\alpha\overline{V}^2}{2} = \int_A \frac{V^2}{2}\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \Rightarrow \alpha = \frac{\int_A (V^2/2)\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA}{\dot{m}\overline{V}^2/2}$$

$$\boxed{\frac{p_{out}}{\rho} + \frac{\alpha_{out}\overline{V}^2_{out}}{2} + gz_{out} = \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{\alpha_{in}\overline{V}^2_{in}}{2} + gz_{in} + w_{\substack{\text{shaft}\\ \text{net in}}} - \text{loss}}$$

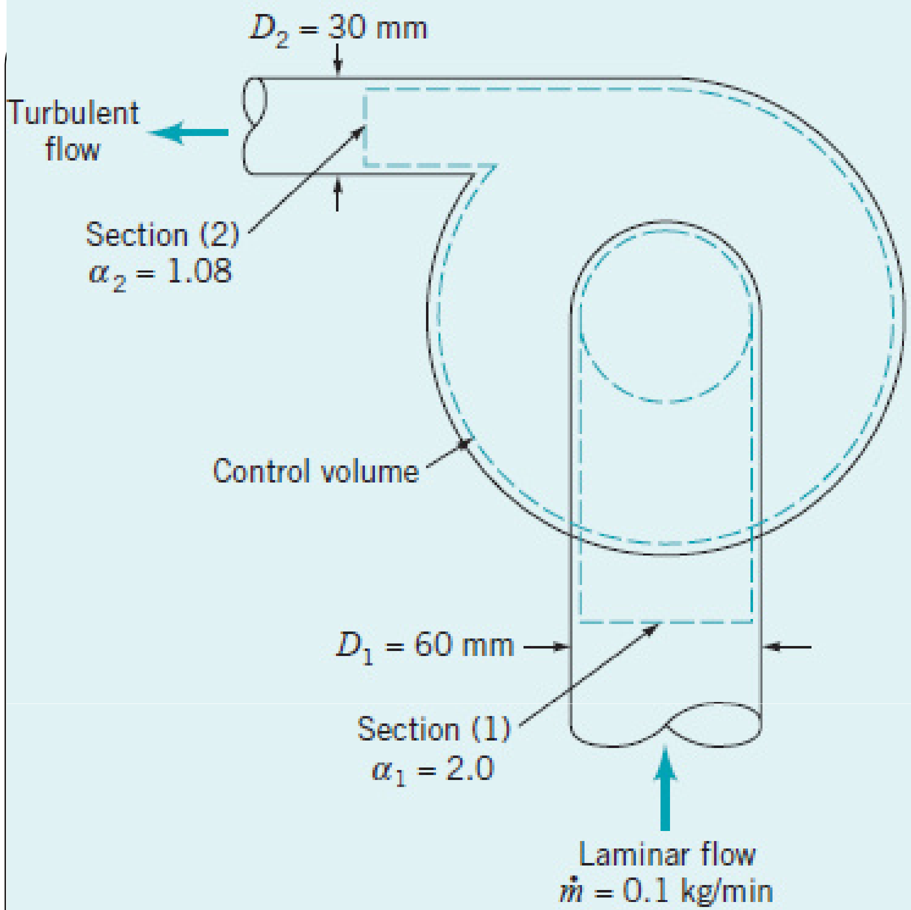
$$p_{out} + \frac{\rho\alpha_{out}\overline{V}^2_{out}}{2} + \gamma z_{out} = p_{in} + \frac{\rho\alpha_{in}\overline{V}^2_{in}}{2} + \gamma z_{in} + \rho w_{\substack{\text{shaft}\\ \text{net in}}} - \rho(\text{loss})$$

$$\boxed{\frac{p_{out}}{\gamma} + \frac{\alpha_{out}\overline{V}^2_{out}}{2g} + z_{out} = \frac{p_{in}}{\gamma} + \frac{\alpha_{in}\overline{V}^2_{in}}{2g} + z_{in} + \frac{w_{\substack{\text{shaft}\\ \text{net in}}}}{g} - h_L}$$



By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

مثال: برای یک فن کوچک هوا با دبی ۰/۱kg/min با جریان آرام وارد شده و با جریان درهم از فن خارج می شود. افزایش فشار فن برابر با ۰/۱kPa و توان موتور فن برابر ۰/۱۴W می باشد. مقدار تلفات را برای شرایط واقعی و شرایطی که پروفیل سرعت یکنواخت باشد، مقایسه نمایید.



$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 \overline{V}_2^2}{2} + \underbrace{\cancel{gz_2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 \overline{V}_1^2}{2} + \cancel{gz_1}}_{0 \text{ (change in } gz \text{ is negligible)}} - \text{loss} + w_{\substack{\text{shaft} \\ \text{net in}}}$$

$$\text{loss} = w_{\substack{\text{shaft} \\ \text{net in}}} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right) + \frac{\alpha_1 \overline{V}_1^2}{2} - \frac{\alpha_2 \overline{V}_2^2}{2}$$

$$w_{\substack{\text{shaft} \\ \text{net in}}} = \frac{\text{power to fan motor}}{\dot{m}}$$

$$w_{\substack{\text{shaft} \\ \text{net in}}} = \frac{(0.14 \text{ W})[(1 \text{ N} \cdot \text{m/s})/\text{W}]}{0.1 \text{ kg/min}} (60 \text{ s/min}) = 84.0 \text{ N} \cdot \text{m/kg}$$

$$\overline{V}_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} = \frac{\dot{m}}{\rho(\pi D_1^2/4)} = \frac{(0.1 \text{ kg/min})(1 \text{ min/60 s})(1000 \text{ mm/m})^2}{(1.23 \text{ kg/m}^3)[\pi(60 \text{ mm})^2/4]} = 0.479 \text{ m/s}$$

$$\overline{V}_2 = \frac{(0.1 \text{ kg/min})(1 \text{ min/60 s})(1000 \text{ mm/m})^2}{(1.23 \text{ kg/m}^3)[\pi(30 \text{ mm})^2/4]} = 1.92 \text{ m/s}$$

uniform velocity profiles $(\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0)$

$$\text{loss} = w_{\substack{\text{shaft} \\ \text{net in}}} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right) + \frac{\overline{V}_1^2}{2} - \frac{\overline{V}_2^2}{2}$$

$$\text{loss} = 84.0\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}} - \frac{(0.1\text{ kPa})(1000\text{ Pa/kPa})(1\text{ N/m}^2/\text{Pa})}{1.23\text{ kg/m}^3} + \frac{(0.479\text{ m/s})^2}{2[1\,(\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)]} - \frac{(1.92\text{ m/s})^2}{2[1\,(\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)]}$$

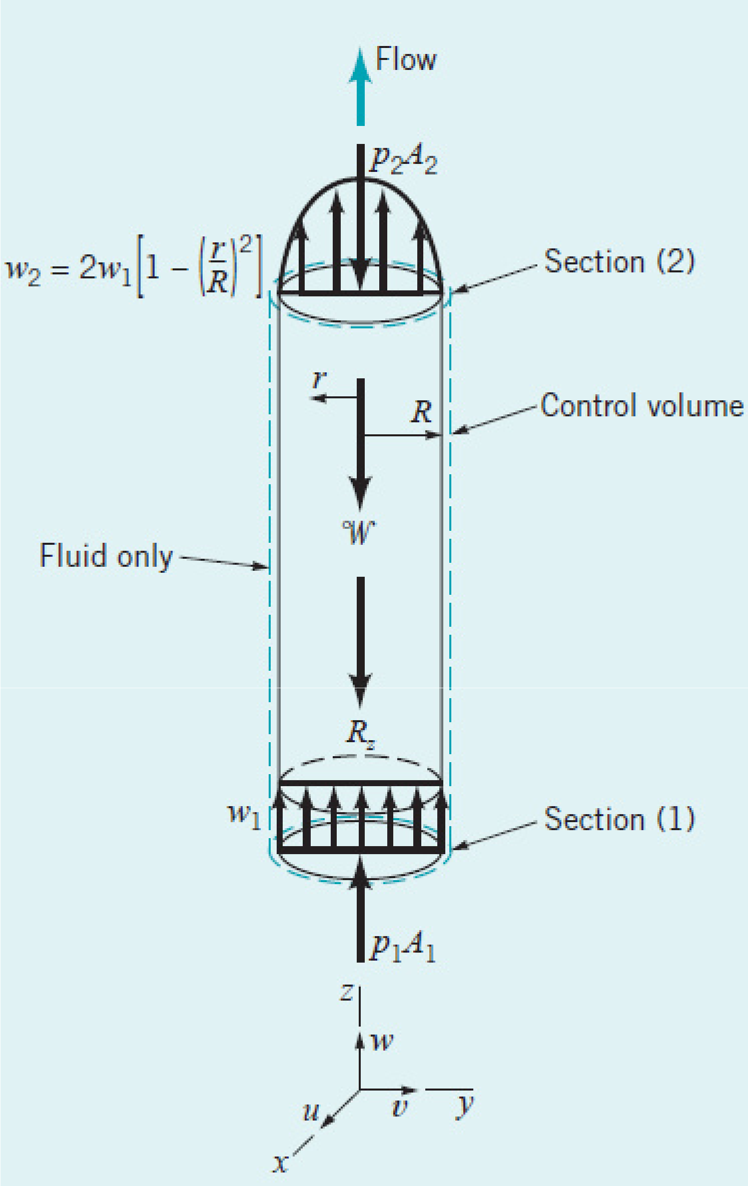
$$\begin{aligned}\text{loss} &= 84.0\text{ N}\cdot\text{m/kg} - 81.3\text{ N}\cdot\text{m/kg} \\ &\quad + 0.115\text{ N}\cdot\text{m/kg} - 1.84\text{ N}\cdot\text{m/kg} \\ &= 0.975\text{ N}\cdot\text{m/kg}\end{aligned}$$

actual velocity profiles ($\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1.08$)

$$\text{loss} = w_{\substack{\text{shaft}\\ \text{net in}}} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right) + \alpha_1\frac{\overline{V}_1^2}{2} - \alpha_2\frac{\overline{V}_2^2}{2}$$

$$\text{loss} = 84\text{ N}\cdot\text{m/kg} - \frac{(0.1\text{ kPa})(1000\text{ Pa/kPa})(1\text{ N/m}^2/\text{Pa})}{1.23\text{ kg/m}^3} + \frac{2(0.479\text{ m/s})^2}{2[1\,(\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)]} - \frac{1.08(1.92\text{ m/s})^2}{2[1\,(\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)]}$$

$$\begin{aligned}\text{loss} &= 84.0\text{ N}\cdot\text{m/kg} - 81.3\text{ N}\cdot\text{m/kg} \\ &\quad + 0.230\text{ N}\cdot\text{m/kg} - 1.99\text{ N}\cdot\text{m/kg} \\ &= 0.940\text{ N}\cdot\text{m/kg}\end{aligned}$$



مثال: برای شکل مقابل مقدار افت فشار را بدست آورید.

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2\overline{w}_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1\overline{w}_1^2}{2} + gz_1 - \text{loss} + \underbrace{w_{\substack{\text{shaft}\\ \text{net in}}}}_{0 \text{ (no shaft work)}}$$

$$p_1 - p_2 = \rho\left[\frac{\alpha_2\overline{w}_2^2}{2} - \frac{\alpha_1\overline{w}_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \text{loss}\right]$$

α_1, is equal to 1.0

$$\alpha_2 = \frac{\int_{A_2} \rho w_2^3\, dA_2}{\dot{m}\overline{w}_2^2} \qquad \alpha_2 = \frac{\rho\int_0^R (2w_1)^3[1 - (r/R)^2]^3\, 2\pi r\, dr}{(\rho A_2\overline{w}_2)\overline{w}_2^2}$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow w_1 = \overline{w}_2$$

$$\alpha_2 = \frac{\rho 8\overline{w}_2^3 2\pi\int_0^R [1 - (r/R)^2]^3 r\, dr}{\rho\pi R^2\overline{w}_2^3}$$

$$\alpha_2 = \frac{16}{R^2}\int_0^R [1 - 3(r/R)^2 + 3(r/R)^4 - (r/R)^6] r\, dr = 2$$

$$p_1 - p_2 = \rho\left[\frac{2.0\overline{w}_2^2}{2} - \frac{1.0\overline{w}_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \text{loss}\right]$$

By: M. Farhadi, Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

$$\overline{w}_2 = \overline{w}_1 = \overline{w} \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \frac{\rho \overline{w}^2}{2} + \rho g(z_2 - z_1) + \rho(\text{loss}) \qquad \rho g(z_2 - z_1) = \frac{\mathcal{W}}{A}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho \overline{w}^2}{2} + \frac{\mathcal{W}}{A} + \rho(\text{loss})$$

Viscous loss

hydrostatic pressure effect

در مثال اسلاید ۱۹ این مساله حل شده که نتیجه برای افت فشار برابر با :

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho w_1^2}{3} + \frac{R_z}{A_1} + \frac{\mathcal{W}}{A_1}$$

The change in kinetic energy between sections (1) and (2)

$$\frac{\rho \overline{w}^2}{2} + \frac{\mathcal{W}}{A} + \rho(\text{loss}) = \frac{\rho \overline{w}^2}{3} + \frac{R_z}{A} + \frac{\mathcal{W}}{A} \quad \Rightarrow \quad \text{loss} = \frac{R_z}{\rho A} - \frac{\overline{w}^2}{6}$$

سایر قسمتها بصورت آزاد مطالعه شود